

ملخص درس الدوال الأصلية:

الدوال الأصلية: تعاريف وخصائص

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على

مجال I

نسمي دالة أصلية للدالة f على I , كل

دالة F قابلة للاشتقاق على I , و مشتقتها f

هي, أي $(\forall x \in I); F'(x) = f(x)$

خاصية 1: لتكن f دالة عددية معرفة على

مجال I , و F دالة أصلية للدالة على I ,

الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال

المعرفة على I بما يلي: $x \mapsto F(x) + k$,

حيث k عدد حقيقي.

خاصية 2: لتكن f دالة عددية معرفة على

مجال I و x_0 عنصرا من I و y_0 عددا

حقيقيا معلوما.

إذا كانت f دالة تقبل دالة أصلية على I فانه

توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على I

بحيث: $G(x_0) = y_0$

خاصية 3: كل دالة متصلة على مجال I تقبل

دالة أصلية على I .

خاصية 4: لتكن f و g دالتين عدديتين

معرقتين على مجال I , و k عددا حقيقيا.

إذا كانت F و G دالتين أصليتين, على

التوالي للدالتين f و g على I , فان:

■ الدالة $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$

على I .

■ الدالة kF دالة أصلية للدالة kf على I .

أمثلة: حدد مجموعة الدوال الأصلية

للدوال التالية:

$$(1) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1 \quad (2) f(x) = 5x^4 + 3x + 1$$

$$(3) f(x) = \sin x + x \cos x$$

$$(4) f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2} \quad (5) f(x) = (2x - 1)^3$$

$$(6) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (7) f(x) = 2\sqrt{2x + 1}$$

$$(8) I = \mathbb{R}; f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2}$$

$$(9) f(x) = \cos x e^{\sin x}$$

أجوبة: (1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$

$$\text{اذن } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 1x + k$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$$

$$\text{اذن } F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$(3) f(x) = \sin x + x \cos x = x' \sin x + x(\sin x)'$$

$$\text{اذن } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = x \times \sin x + k$$

$$(4) f(x) = (2x - 1)^3 = \frac{1}{2} (2x - 1)' (2x - 1)^3$$

$$\text{اذن } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} (2x - 1)^{3+1} + k$$

$$\text{ومنه } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{8} (2x - 1)^4 + k$$

$$(5) f(x) = \frac{x}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{يعني } f(x) = -\frac{(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{اذن } F(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + k \quad \text{حيث } k \in \mathbb{R}$$

$$(6) f(x) = 2\sqrt{2x + 1} = (2x + 1)' (2x + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{اذن } F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} (2x + 1)^{\frac{1}{2} + 1} + k \quad \text{حيث } k \in \mathbb{R}$$

$$\text{ومنه } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{2}{3} (2x + 1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$\text{ومنه } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{2}{3} (2x + 1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2x + 1})^3 + k$$

$$k \in \mathbb{R}$$

$$(7) f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{اذن } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + k$$

$$(8) \text{ لدينا } f(x) = \frac{x^3}{x^4 + 2} = \frac{1}{4} \frac{(x^4 + 2)'}{x^4 + 2}$$

$$\text{اذن } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{4} \ln|x^4 + 2| + k$$

$$\text{يعني } k \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 2) + k$$

$$x^4 + 2 > 0$$

$$(9) f(x) = \cos x e^{\sin x} = (\sin x)' e^{\sin x}$$

$$\text{ومنه } F(x) = e^{\sin x} + k \quad \text{مجموعة الدوال الألية على } \mathbb{R}$$

جدول دوال أصلية لدوال اعتيادية:

الدالة f	الدوال الأصلية F	الدالة f	الدوال الأصلية F	الدالة f	الدوال الأصلية F
$a; (a \in \mathbb{R})$	$ax + k; k \in \mathbb{R}$	e^x	$e^x + k$	x	$\frac{x^2}{2} + k$
$x^n; n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + k$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + k$	$x^r; r \in (\mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + k$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x} + k$	$u'e^u$	$e^u + k$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\sin x$	$-\cos x + k$	$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$	$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + k$