

توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
<p>- دالة اللوغاريتم هي الدالة الأصلية للدالة $x \rightarrow \frac{1}{x}$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم في 1</p> <p>- نقبل في هذا المستوى أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ وتعتبران نهايتين أساسيتين؛ كما تقبل صيغة الدالة المشتقة لدالة اللوغاريتم النيبيري.</p>	<p>- التمكن من الحساب على اللوغاريتمات النيبيرية والعشرية؛</p> <p>- التمكن من حل معادلات ومترجمات لوغاريتمية بسيطة؛</p> <p>- استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة للوغاريتم عدد حقيقي موجب قطعاً أو تحديد قيمة مقربة لعدد لوغاريتمه معلوم؛</p> <p>- التمكن من نهايتي دالة اللوغاريتم النيبيري عند محددات حيز تعريفه؛</p> <p>- التمكن من دراسة وتمثيل دوال بسيطة تحتوي صيغها على دالة اللوغاريتم النيبيري</p>	<p>1. دالة اللوغاريتم النيبيري - الرمز \ln</p> <p>- صيغ: $\ln \frac{a}{b} \quad \ln \frac{1}{b} \quad \ln ab$</p> <p>$\ln \sqrt{a}$</p> <p>$\ln a^n \quad (n \in \mathbb{Z})$</p> <p>- دراسة وتمثيل الدالة $x \rightarrow \ln x$</p> <p>2. اللوغاريتم العشري</p>

I. تعريف:

- توجد دالة تسمى دالة اللوغاريتم النيبيري يرمز لها بـ \ln و هي دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ و لدينا: $\ln(x) = \frac{1}{x}$ ($\forall x \in]0, +\infty[$)
- دالة اللوغاريتم النيبيري تنعدم في 1 أي $\ln(1) = 0$.

II. خاصيات جبرية:

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a) \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \quad (\forall a > 0) (\forall b > 0) \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \ln(a^n) = n \ln(a)$$

مثال: إذا علمت أن $\ln(2) \approx 0,7$ و $\ln(3) \approx 1,1$ فاحسب ما يلي: $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ $\ln(72)$ $\ln(8)$ $\ln(4)$ $\ln(6)$

$$\ln(3\sqrt{2}) \quad \ln(\sqrt{6}) \quad \ln(\sqrt{2}) \quad \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

الحل: $\ln(6) = \ln(2 \times 3) = \ln(2) + \ln(3) \approx 0,7 + 1,1 = 1,8$

$$\ln(4) = \ln(2 \times 2) = \ln(2^2) = 2 \ln(2) \approx 2 \times 0,7 \approx 1,4$$

$$\ln(8) = \ln(2 \times 2 \times 2) = \ln(2^3) = 3 \ln(2) \approx 3 \times 0,7 \approx 2,1$$

$$\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{1}{2} \times 0,7 \approx 0,35$$

$$\ln(72) = \ln(9 \times 8) = \ln(9) + \ln(8) = \ln(3^2) + \ln(2^3)$$

$$\ln(72) = \ln(3^2 \times 2^3) = \ln(3^2) + \ln(2^3) = 2 \ln(3) + 3 \ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \approx -0,7 \quad \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2) \approx 1,1 - 0,7 \approx 0,4 \quad \ln(72) \approx 2 \times 1,1 + 3 \times 0,7 \approx 2,2 + 2,1 \approx 4,3$$

$$\ln(3\sqrt{2}) = \ln(3) + \ln(\sqrt{2}) \approx 1,1 + \frac{1}{2} \ln(2) \approx 1,1 + \frac{0,7}{2} \approx 1,1 + 0,35 \approx 1,45 \quad \ln(\sqrt{6}) = \frac{1}{2} \ln(6) = \frac{1}{2} \times 1,8 \approx 0,9$$

تمرين 1:1 إذا علمت أن $\ln(2) = 0,7$ و $\ln(5) = 1,6$ فاحسب ما يلي: $\ln(125)$ $\ln(16)$ $\ln(25)$ $\ln(10)$

$$\ln(2\sqrt{5}) \quad \ln(\sqrt{5}) \quad \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

تحقق أن: $2 \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(8) = 0$

الحل:1: $\ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln(2) + \ln(5) \approx 0,7 + 1,6 \approx 2,3$

$$\approx 0,7 + 1,6 \approx 2,3$$

$$\ln(25) = \ln(5 \times 5) = \ln(5^2) = 2 \ln(5) \approx 2 \times 1,6 \approx 3,2$$

$$\ln(16) = \ln(2 \times 2 \times 2 \times 2) = \ln(2^4) = 4 \ln(2) \approx 4 \times 0,7 \approx 2,8$$

$$\ln(125) = \ln(5 \times 5 \times 5) = \ln(5^3) = 3 \ln(5) \approx 3 \times 1,6 \approx 4,8$$

$$\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln(2) - \ln(5) \approx 0,7 - 1,6 \approx -0,9 \quad \ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5) \approx -1,6$$

$$\ln(2\sqrt{5}) = \ln(2) + \ln(\sqrt{5}) = \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(5) = 0,7 + 0,8 = 1,5 \quad = 0,7 + \frac{1}{2}(1,6) \ln(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\ln(5) \approx \frac{1}{2} \times 1,6 \approx 0,8$$

$$2 \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(8) = 0 \text{ ??? ? ? (2)}$$

$$2 \ln 4 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(8) = 2 \ln 2^2 - \ln(2) - \ln(2^3)$$

$$= 2 \times 2 \ln 2 - \ln(2) - 3 \ln(2) = 4 \ln 2 - \ln(2) - 3 \ln(2) = 0$$

تمرين 2: بسط

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) \quad .1$$

$$B = \ln(0,01) - \ln(1000) + \ln(10^6) \quad .2$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln(15) = \ln(3) - \ln(5) + \ln(3 \times 5) \quad (\text{الجواب: 1})$$

$$A = \ln(3) - \ln(5) + \ln 3 + \ln 5 = 2 \ln(3) = \ln(3^2) = \ln(9)$$

$$B = \ln(10^{-2}) - \ln(10^3) + \ln(10^6) = -2 \ln(10) - 3 \ln(10) + 6 \ln(10)$$

$$B = \ln(10) = \ln(2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5$$

تمرين 3: إذا علمت أن $\ln(2) \approx 0,7$ و $\ln(11) \approx 2,4$ فاحسب ما يلي:

$$\ln\left(\frac{11}{2}\right) \quad \ln(44) \quad \ln(32) \quad \ln(121) \quad \ln(22)$$

$$\ln(22) = \ln(2 \times 11) = \ln(2) + \ln(11) \approx 0,7 + 2,4 \approx 3,1 \quad \text{الحل}$$

$$\ln(121) = \ln(11 \times 11) = \ln(11^2) = 2 \ln(11) \approx 2 \times 2,4 \approx 4,8$$

$$\ln(32) = \ln(2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = \ln(2^5) = 5 \ln(2) = 5 \times 0,7 \approx 3,5$$

$$= \ln(3^2) + \ln(2^3)$$

$$\ln(44) = \ln(4 \times 11) = \ln(4) + \ln(11) = 2 \ln(2) + \ln(11)$$

$$\ln(44) \approx 2 \times 0,7 + 2,4 \approx 1,4 + 2,4 \approx 3,8$$

$$\ln\left(\frac{11}{2}\right) = \ln(11) - \ln(2) \approx 2,4 - 0,7 \approx 1,7$$

III. النهايات:

تقبل النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{الخاصية 2:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{الخاصية 1:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1 \quad (\text{مثال: أحسب النهايات التالية: 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln(x) + 1 = 2 \times (+\infty) + 1 = +\infty \quad (\text{الجواب: 1})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{شكل غير محدد لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(x) + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{\ln x} = 2 + 0 = 2 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^- \quad (3)$$

IV. جدول تغيرات الدالة $x \rightarrow \ln(x)$:

$$\text{لدينا: } (\forall x \in]0, +\infty[): \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{بما أن } x > 0 \text{ فإن } \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$$

و بالتالي الدالة \ln تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

و منه الجدول:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

لأن الدالة \ln تزايدية قطعاً. $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b \quad (\forall a > 0)(\forall b > 0)$ و $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b \quad (\forall a > 0)(\forall b > 0)$

العدد e : $e \approx 2,71828\dots$ و e هو العدد الحقيقي الذي يحقق $\ln(e) = 1$.

ولدينا: $(\forall n \in \mathbb{Z}) \ln(e^n) = n \ln(e) = n$

أمثلة (1): $\ln(e^3) = 3$ و $7 = \ln(e^7)$

(2) حل المعادلة $\ln(x) = 7$ يعني $x = e^7$

تمرين 4: أحسب وبسط :

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9) \quad A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

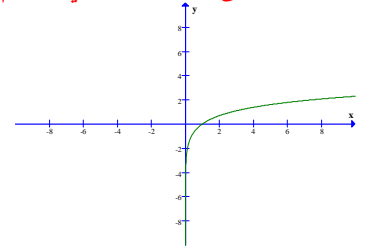
$$A = \ln(e^2) + \ln(e^4) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2\ln(e) + 4\ln(e) - (-\ln(e)) \quad (\text{الجواب: 1})$$

$$A = 2 \times 1 + 4 \times 1 - (-1) = 7$$

$$B = 2\ln(\sqrt{e}) + \ln(e\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\ln(e^9) = 2 \times \frac{1}{2}\ln(e) + \ln(e) + \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3} \times 9\ln(e)$$

$$B = 1\ln(e) + \ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e) - 3\ln(e) = 1 + 1 + \frac{1}{2} - 3 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

V. منحنى الدالة \ln في معلم متعامد ممنظم



تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبيري: المعادلات:

مثال : حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$(\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0 \quad (6) \quad \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0 \quad (5) \quad \ln(x + 1) = \ln(3) \quad (4) \quad \ln(x) = 7 \quad (3) \quad \ln(x) = 1 \quad (2) \quad \ln(x) = 0 \quad (1)$$

الحل: الكتابة $\ln(x)$ لها معنى إذا كان $x > 0$.

(1) يجب أن يكون $x > 0$ في المعادلة $\ln(x) = 0$

و منه مجموعة تعريف هذه المعادلة هي $]0, +\infty[$

المعادلة $\ln(x) = 0$ تكافئ $\ln(x) = \ln(1)$ و منه $x = 1$ و بما أن $1 \in]0, +\infty[$

فان مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{1\}$

(2) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 1$ هي $]0, +\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x) = \ln(e)$ أي $x = e$ و بما أن $e \in]0, +\infty[$ فان $S = \{e\}$

(3) مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x) = 7$ هي $]0, +\infty[$

و هي تكافئ $\ln(x) = \ln(e^7)$ أي $x = e^7$ و بما أن $e^7 \in]0, +\infty[$ فان $S = \{e^7\}$.

(4) يجب أن يكون $x + 1 > 0$ أي $x > -1$

و منه مجموعة تعريف المعادلة $\ln(x + 1) = \ln(3)$ هي $] -1, +\infty[$

المعادلة تكافئ $x + 1 = 3$ أي $x = 2$ و بما أن $2 \in] -1, +\infty[$ فان $S = \{2\}$

(5) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0, +\infty[$

$$\ln(x) = 0 \quad \text{أو} \quad \ln(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x)(\ln(x) - 1) = 0$$

يعني $\ln(x) = 0$ أو $\ln(x) = 1$ يعني $\ln(x) = \ln(1)$ أو $\ln(x) = \ln(e)$ يعني $x = 1$ أو $x = e$ و منه فان $S = \{1, e\}$

(6) مجموعة تعريف المعادلة هي $]0, +\infty[$

$(\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$ أو $\ln x + 1 = 0$ يعني $\ln(x) = 1$ أو $\ln(x) = -1$ يعني $\ln(x) = \ln(e)$ أو $\ln(x) = -\ln(e)$

يعني $x = e$ أو $x = \frac{1}{e}$ و بما أن $e \in]0, +\infty[$ و $\frac{1}{e} \in]0, +\infty[$ فان $S = \left\{ \frac{1}{e}, e \right\}$

تطبيق خاصيات اللوغاريتم النيبيري:

دراسة دالة تحتوي صيغتها على اللوغاريتم النيبيري:

مثال 1: نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \ln x + 1$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f .

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$ و $f\left(\frac{1}{e}\right)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

و ادرس اشارة المشتقة

4. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

5. أعط جدول تغيرات الدالة f .

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0, +\infty[$

$$2. f(1) = \ln(1) + 1 = 1$$

$$f(e) = \ln(e) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(e^2) = \ln e^2 + 1 = 2 \ln e + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1 = -\ln e + 1 = -1 + 1 = 0$$

3. حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = (\ln(x) + 1)' = (\ln(x))' + (1)' = \frac{1}{x} > 0$$

لأن x موجب قطعاً.

4. حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5. ومنه جدول تغيرات f هو كما يلي:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

مثال 2: نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = 2 \ln x - x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

4. ادرس اشارة مشتقة الدالة

5. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

الحل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي $]0, +\infty[$

$$2. f(1) = 2 \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(e) = 2 \ln(e) - e = 2 - e$$

$$f(e^2) = 2 \ln e^2 - e^2 = 4 \ln e - e^2 = 4 \times 1 - e^2 = 4 - e^2$$

3. حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$

4. اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(2-x)$ لأن x موجب قطعاً.

5. لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \ln x + x$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f

2. أحسب $f(1)$ و $f(e)$ و $f(e^2)$

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

4. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

أجوبة: (1) مجموعة تعريف الدالة f هي $]0, +\infty[$

$$f(e) = \ln(e) + e = 1 + e \text{ و } f(1) = \ln(1) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$f(e^2) = \ln e^2 + e^2 = 2 \ln e + e^2 = 2 \times 1 + e^2 = 2 + e^2$$

(3) حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x + x = -\infty$$

VI. اللوغاريتم العشري:

تعريف: يرمز لدالة اللوغاريتم العشري ب: \log و هي معرفة على $]0, +\infty[$

$$\text{كما يلي: } (\forall x \in]0, +\infty[): \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

$$\text{ويحقق } \log(10) = 1$$

مثال: علماً أن $\log(2) \approx 0,3$ أحسب $\log(20)$

$$\log(20) = \log(2 \times 10) = \log(2) + \log(10)$$

$$\approx 0,3 + 1 = 1,3$$

خصائص هامة لدالة اللوغاريتم العشري:

$$1. \log(10) = 1 \text{ و } \log(1) = 0$$

$$2. (\forall a > 0)(\forall b > 0): \log(a \times b) = \log(a) + \log(b)$$

$$3. (\forall a > 0): \log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$

$$4. (\forall a > 0)(\forall b > 0): \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$5. (\forall a > 0)(\forall n \in \mathbb{Z}): \log(a^n) = n \log(a)$$

$$6. (\forall n \in \mathbb{Z}): \log(10^n) = n$$

$$7. (\forall a > 0)(\forall b > 0): \log(a) = \log(b) \Leftrightarrow a = b$$

$$8. (\forall a > 0)(\forall b > 0): \log(a) > \log(b) \Leftrightarrow a > b$$

تمرين 6: بسط وأحسب:

$$A = \log(0,01) - \log(1000) + \log(10^6)$$

$$B = \log(10) + 2 \log(100) + \log(10^4)$$

$$C = \log(4) + \log(25)$$

$$D = 1 + 2 \log 2 - \log(40)$$

$$E = \log(900) + 2 \log\left(\frac{1}{3}\right) - 2$$

$$\text{الجواب: } A = \log(10^{-2}) - \log(10^3) + \log(10^6)$$

$$A = -2 \log(10) - 3 \log(10) + 6 \log(10)$$

$$A = -2 - 3 + 6 = 1$$

$$B = \log(10) + 2 \log(100) + \log(10^4)$$

$$B = 1 + 2 \log(10^2) + \log(10^4) = 1 + 2 \times 2 + 4 \log(10) = 1 + 4 + 4$$

$$C = \log(4) + \log(25) = \log(4 \times 25) = \log(100)$$

$$C = \log(10^2) = 2 \log(10) = 2 \times 1 = 2$$

$$D = 1 + 2 \log 2 - \log(40) = 1 + \log 2^2 - (\log(4 \times 10))$$

$$D = 1 + 2 \log 2 - (\log 4 + \log 10) = 1 + 2 \log 2 - \log 4 - \log 10$$

$$D = 1 + 2 \log 2 - \log 4 - 1 = 0$$

$$E = \log(900) + 2 \log\left(\frac{1}{3}\right) - 2 = \log(9 \times 100) - 2 \log(3) - 2$$

$$E = \log 9 + \log 100 - 2 \log(3) - 2$$

$$E = 2 \log 10 - 2 = 2 \times 1 - 2 = 0 \text{ ومنه}$$

$$E = \log 3^2 + \log 10^2 - 2 \log(3) - 2 = 2 \log 3 + 2 \log 10 - 2 \log(3) - 2$$

تمرين 7: علما أن $\log(5) \approx 0,7$ و $\log(3) \approx 0,47$

أحسب $\log(300)$ و $\log(50)$ و $\log\left(\frac{1}{3}\right)$ و $\log(\sqrt{5})$ و $\log(15)$

أجوبة : $\log(15) = \log(5 \times 3) = \log(5) + \log(3) = 0,7 + 0,47 = 1,17$

$$\log(\sqrt{5}) = \frac{1}{2} \log(5) = \frac{1}{2} \times 0,7 = 0,35$$

$$\log\left(\frac{1}{3}\right) = -\log(3) \approx -0,47$$

$$\log(50) = \log(5 \times 10) = \log(5) + \log(10) = 0,7 + 1 = 1,7$$

$$\log(300) = \log(3 \times 100) = \log(3) + \log(100) = 0,47 + 2 = 2,47$$