



توجيهات تربوية	القدرات المنتظرة	محتوى البرنامج
<p>- إن توظيف الترتيب في مقارنة بعض الأعداد وفي إثبات بعض العلاقات يعتبر من المهارات التي ينبغي الحرص على تلميحها وتثبيتها، كما أن تأويل علاقات من الشكل $x - a \leq r$ وإنجاز بعض الإكبارات باستعمال المتفاوتات المثلثية وخاصيات القيمة المطلقة، من التقنيات الأساسية التي ينبغي تلميحها على استعمالها بشكل تدريجي.</p> <p>- ينبغي ربط مفهوم القيمة المطلقة بالمسافة بين نقطتين على مستقيم مدرج.</p> <p>- يمكن تقديم الخصائص المتعلقة بتأطير وتقريب مجموع عددين أو فرق عددين في الحالة العامة أما تأطير وتقريب جداء وخارج عددين حقيقيين فينبغي دراستها من خلال أمثلة عددية مختارة تبين للتلاميذ الاحتياطات التي ينبغي اتخاذها وشروط صحة الاستدلالات.</p> <p>- تعتبر الآلة الحاسوبية أداة مساعدة في تناول المفاهيم السابقة (التأطير والتقريب...) غير أنه ينبغي التحقق من أن التلاميذ ملمون بالكتابة العلمية لعدد ومدركون أن الآلة الحاسوبية تعطي في أغلب الأحيان تقريبا عشريا للنتيجة، لذا ينبغي إكساب التلاميذ التقنيات الخاصة بالآلة الحاسوبية العلمية (الأولويات في العمليات، وظائف الملامس...)</p>	<p>- التمكن من مختلف تقنيات مقارنة عددين (أو تعبيرين) واستعمال المناسب منها حسب الوضعية المدروسة؛</p> <p>- تمثيل مختلف العلاقات المرتبطة بالترتيب على المستقيم العددي؛</p> <p>- إدراك وتحديد تقريب عدد (أو تعبير) بدقة معلومة. إنجاز إكبارات أو إصغارات لتعابير جبرية؛</p> <p>- استعمال الآلة الحاسبة لتحديد قيم مقربة لعدد حقيقي.</p>	<p>- الترتيب والعمليات؛</p> <p>- القيمة المطلقة وخاصياتها؛</p> <p>- المجالات؛</p> <p>- التأطير والتقريب، التقريبات العشرية.</p>

I. الترتيب والعمليات:

1) تعاريف: ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b و نكتب $a \leq b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$

2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b و نكتب $a \geq b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$

3. نقول إن a أصغر قطعاً من b و نكتب $a < b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$

4. نقول إن a أكبر قطعاً من b و نكتب $a > b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

ملحوظة: a و b عدنان حقيقيان.

• $a \leq b$ يكافئ $a < b$ أو $a = b$

• مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية:

$$a = b, a > b, a < b$$

$$\text{أمثلة: } \sqrt{5} < 3, -7 < -\frac{1}{3}, \pi > 2,14$$

$$\text{مثال: قارن بين } \frac{100}{101} \text{ و } \frac{101}{102}$$

الجواب:

$$\text{نحسب الفرق: } \frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$$

$$\text{اذن: } \frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^+ \text{ ومنه } \frac{101}{102} \geq \frac{100}{101}$$

تمرين 1: قارن a و b و نضع $a = 2 + \sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$

الجواب:

لدينا $a - b = 2 - \sqrt{3}$ و بما أن $2 - \sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعاً

أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$ فإن: $a > b$

تمرين 2: $a \in \mathbb{R}$ قارن $2a$ و $a^2 + 1$

$$\text{الجواب: } (a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$$

ومنه $a^2 + 1 \geq 2a$ مهما يكن $a \in \mathbb{R}$

2) خاصيات: لتكن a و b و c و d أعداداً حقيقية.

خاصية: إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فإن $a \leq c$

ملحوظة: إذا كان $a \leq b$ و $b < c$ فإن $a < c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة a مع نفس العدد b .

$$\text{مثال: لدينا: } 1 < \frac{30}{31} \text{ و } \frac{114,01}{114} < 1 \text{ ومنه فإن: } \frac{30}{31} < \frac{114,01}{114}$$

خاصية الترتيب و الجمع:

$$a \leq b \text{ يكافئ } a + c \leq b + c$$

■ إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فإن $a + c \leq b + d$

■ إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فإن $a + b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

■ إذا كان $c > 0$, فإن: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$

■ إذا كان $c < 0$, فإن: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$

■ إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فإن $0 \leq ac \leq bd$

■ إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فإن $a + b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب:

a و b عدنان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة ($ab > 0$)

$$a \leq b \text{ يكافئ } \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

إذا كان $a \leq b$ و $c < d$ فإن $a + c < b + d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عدنان حقيقيان موجبان.

$$a \leq b \text{ يكافئ } a^2 \leq b^2 \text{ و } \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

لكل $a \in \mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة إذا عوضنا الرمز \leq بأحد الرموز: \geq أو $<$ أو $>$.

إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فإن $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$

تمرين 3: قارن العددين: $a = \sqrt{6}$ و $b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$

الجواب: نحسب الفرق:

$$a - b = \sqrt{6} - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} \times 2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)$$

$$a-b = \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3}(\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}-1)$$

$$a-b = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)$$

لدينا: $\sqrt{2} > 1$ لأن $(\sqrt{2})^2 = 2$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{2}-1) \in \mathbb{R}^{+*}$
ولدينا: $\sqrt{3} > 1$ لأن $(\sqrt{3})^2 = 3$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{3}-1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ومنه: $a > b$: وبالتالي $a-b = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1) \in \mathbb{R}^{+*}$

تمرين 4: قارن العددين: $a = \sqrt{10}$ و $b = \sqrt{5} + \sqrt{2} - 1$
الجواب: نحسب الفرق:

$$a-b = \sqrt{10} - (\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1) = \sqrt{5} \times 2 - (\sqrt{5} + \sqrt{2} - 1)$$

$$a-b = \sqrt{5} \times \sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{5}(\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}-1)$$

$$a-b = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}-1)$$

لدينا: $\sqrt{2} > 1$ لأن $(\sqrt{2})^2 = 2$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{2}-1) \in \mathbb{R}^{+*}$
ولدينا: $\sqrt{5} > 1$ لأن $(\sqrt{5})^2 = 5$ و $(1)^2 = 1$ ومنه $(\sqrt{5}-1) \in \mathbb{R}^{+*}$

ومنه: $a > b$: وبالتالي $a-b = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{5}-1) \in \mathbb{R}^{+*}$

تمرين 5: قارن العددين: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

الجواب: نحسب الفرق:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(2\sqrt{3}+2 - (\sqrt{3})^2 - \sqrt{3}) - ((\sqrt{3})^2 - \sqrt{3} - \sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}+2-3-\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3\sqrt{3}-5}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}$$

لدينا: $3\sqrt{3} > 5$ لأن $(3\sqrt{3})^2 = 27$ و $(5)^2 = 25$ ومنه

$$3\sqrt{3}-5 \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} > \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \text{ وبالتالي } \frac{3\sqrt{3}-5}{2} \in \mathbb{R}^{+*}$$

تمرين 6: ليكن a و b عنصرين من \mathbb{R}_+^* .

نضع: $x = \frac{7a+2b}{7a}$ و $y = \frac{8b}{7a+2b}$ قارن العددين x و y .

الجواب: نحسب الفرق:

$$x-y = \frac{7a+2b}{7a} - \frac{8b}{7a+2b}$$

$$x-y = \frac{(7a+2b)^2 - 7a \times 8b}{7a(7a+2b)} = \frac{49a^2 + 14ab + 14ab + 4b^2 - 56a \times b}{7a(7a+2b)}$$

$$x-y = \frac{49a^2 - 28a \times b + 4b^2}{7a(7a+2b)} = \frac{(7a)^2 - 2 \times 7a \times 2b + (2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$7a(7a+2b) \in \mathbb{R}^+ \text{ و } (7a-2b)^2 \in \mathbb{R}^+ \text{ لأن } x-y = \frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)} \in \mathbb{R}^+$$

وبالتالي: $x \geq y$

تمرين 7: ليكن x عنصرا من \mathbb{R}^+ .

1. قارن العددين: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$ و $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

2. استنتج مقارنة العددين: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$ و $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

الجواب (1): عنصرا من \mathbb{R}^+ يعني $x \geq 0$

لدينا $x+2 \geq x$ لأن: $(x+2) - x \geq 0$

اذن: $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$ وايضا $\sqrt{x+1} \geq \sqrt{x}$ نجد النتيجة المطلوبة:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

أي أن: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$

(2) الاستنتاج:

بضربنا في المرافق نجد المتساوية التالية:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

أي أن:

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

وبما أن: $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ فان:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

اذن نستنتج أن: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$

تمرين 8: ليكن x عددا حقيقيا موجبا.

قارن العددين: x و $2\sqrt{x} - 1$.

الجواب: $x - (2\sqrt{x} - 1) = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \times 1 + 1^2 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$

ومنه $x \geq (2\sqrt{x} - 1)$ مهما يكن: $x \in \mathbb{R}^+$

تمرين 9: ليكن n عددا صحيحا طيبيا.

نضع: $a = \sqrt{4n^2 + 1}$ و $b = 2n + 1$ قارن العددين a و b .

الجواب: لمقارنة عددين موجبين نقارن مربعيهما

$$a^2 = (\sqrt{4n^2 + 1})^2 = 4n^2 + 1$$

$$b^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$b^2 - a^2 = 4n^2 + 4n + 1 - (4n^2 + 1) = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 - 1 = 4n$$

$$b^2 - a^2 = 4n \geq 0$$

ومنه $b^2 \geq a^2$ اذن نستنتج أن $b \geq a$ مهما يكن: $x \in \mathbb{N}$

تمرين 10: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x < y < 3$

1. بين أن: $x + y - 6 < 0$

2. قارن العددين $a = x^2 - 6x + 1$ و $b = y^2 - 6y + 1$

الجواب:

(1) لدينا $x < 3$ و $y < 3$ ومنه $x + y < 6$

وبالتالي: $x + y - 6 < 0$

(2) نحسب الفرق: $a - b = (x^2 - 6x + 1) - (y^2 - 6y + 1)$

$$a - b = x^2 - 6x + 1 - y^2 + 6y - 1 = x^2 - y^2 - 6x + 6y$$

$$a - b = (x - y)(x + y) - 6(x - y) = (x - y)(x + y - 6)$$

لدينا $x < y$ اذن $x - y \in \mathbb{R}^-$ وسبق أن وجدنا أن $x + y - 6 \in \mathbb{R}^-$

ومنه $a - b \in \mathbb{R}^+$ أي: $a - b \in \mathbb{R}^+$ وبالتالي $a \geq b$

II. المجالات و التاثير:

1) المجالات: ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a < b$. ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي. **المجالات المحدودة**

المتفاوتة	المجال
$a \leq x \leq b$	$[a, b]$
$a < x \leq b$	$]a, b]$
$a \leq x < b$	$[a, b[$
$a < x < b$	$]a, b[$

المجالات غير المحدودة:

المتفاوتة	المجال
$x > b$	$]b, +\infty[$
$x \geq b$	$[b, +\infty[$
$x \leq a$	$]-\infty, a]$
$x < a$	$]-\infty, a[$

مصطلحات: الرمز $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

• $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية، $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.

• $[a, b]$ يقرأ: "المجال المغلق a, b " أو "القطعة a, b "

• $]a, b[$ يقرأ "المجال المفتوح a, b "

• $]a, +\infty[$ يقرأ "المجال a ، زائد اللانهاية، مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0[$ و $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[$

تمرين 11: بعد التمثيل على مستقيم للمجالين I و J حدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

$$(1) I =]-3, 7] \quad \text{و} \quad J = [-1, +\infty[$$

$$(2) I =]-\infty, 5[\quad \text{و} \quad J = [4, 10]$$

$$(3) I = [0, 10[\quad \text{و} \quad J = [-5, -1]$$

$$(4) I = \left[-\frac{2}{3}, 2\right] \quad \text{و} \quad J = \left]-1, \frac{3}{2}\right[$$

الجواب:

$$(1) I \cup J =]-3, +\infty[\quad I \cap J =]-1, 7]$$

$$(2) I \cup J =]-\infty, 10[\quad I \cap J = [4, 5]$$

$$(3) I \cup J = [-5, 10] \quad I \cap J = \emptyset$$

$$(4) I \cup J = \left]-1, 2\right[\quad I \cap J = \left[-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right[$$

تمرين 12: حل في \mathbb{R} النظم الآتية

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x > 7 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases} \quad (1)$$

الجواب: الرمز $\{$ يعني التقاطع

$$(1) x \in]5, +\infty[\text{ يعني } x > 5$$

$$x \in]-\infty, 4[\text{ يعني } x < 4$$

$$S =]5, +\infty[\cap]-\infty, 4[= \emptyset$$

$$(2) x \geq -3 \text{ يعني } x \in [-3, +\infty[$$

$$x > 2 \text{ يعني } x \in]2, +\infty[$$

$$S =]2, +\infty[\cap [-3, +\infty[=]2, +\infty[$$

$$(3) x > 7 \text{ يعني } x \in]7, +\infty[$$

$$x \geq 0 \text{ يعني } x \in [0, +\infty[$$

$$S =]7, +\infty[\cap [0, +\infty[=]7, +\infty[$$

$$(4) -7 < x < 10 \text{ يعني } x \in]-7, 10[$$

$$-3 \leq x \leq 0 \text{ يعني } x \in [-3, 0]$$

$$S =]-7, 10[\cap [-3, 0] = [-3, 0]$$

2) تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.

تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a < b$

بحيث: $a \leq x \leq b$ أو $a < x < b$ أو $a \leq x < b$ أو $a < x \leq b$.

العدد الحقيقي الموجب قطعاً $b - a$ يسمى سعة التأطير و العددين a و b هما محددات التأطير.

تمرين 13: نضع $x \in [1, 3]$ و $y \in [2, 4]$ اعط تأطيرا للأعداد التالية

(1) اعط تأطيرا للأعداد التالية: x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$ و $-x$ و $-y$

$$\frac{1}{x} \text{ و } \frac{1}{y} \text{ و } \frac{x}{y}$$

(2) حدد سعة التأطير لكل من A و B : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و $B = \frac{2x-1}{x+1}$

الجواب (1): $x \in [1, 3]$ يعني $1 \leq x \leq 3$

$$y \in [2, 4] \text{ يعني } 2 \leq y \leq 4$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{ يعني } 1^2 \leq x^2 \leq 3^2 \text{ يعني } 1 \leq x^2 \leq 9$$

$$2 \leq y \leq 4 \text{ يعني } 2^2 \leq y^2 \leq 4^2 \text{ يعني } 4 \leq y^2 \leq 16$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{ يعني } 2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 3 \text{ يعني } 2 \leq 2x \leq 6$$

$$2 \leq y \leq 4 \text{ يعني } 3 \times 2 \leq 3 \times y \leq 3 \times 4 \text{ يعني } 6 \leq 3y \leq 12$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{ يعني } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{1} \text{ يعني } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$2 \leq y \leq 4 \text{ يعني } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{لدينا } \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \text{ اذن: } 1 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{2} \text{ اذن: } \frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ تأطير } A: 6 \leq 3y \leq 12 \text{ يعني } -12 \leq -3y \leq -6$$

وحسب النتائج السابقة وجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:

$$1 + 4 + 2 - 12 \leq x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 9 + 16 + 6 - 6$$

$$\text{وبالتالي: } -5 \leq A \leq 25$$

$$\text{وسعة التأطير هي: } r = 25 - (-5) = 30$$

$$\text{تأطير } B: B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$$

$$\text{لدينا } 1 \leq x \leq 3 \text{ يعني } 2 \leq 2x \leq 6 \text{ يعني } 2-1 \leq 2x-1 \leq 6-1$$

$$\text{يعني } 1 \leq 2x-1 \leq 5$$

$$\text{لدينا } 1 \leq x \leq 3 \text{ يعني } 2 \leq x+1 \leq 4 \text{ يعني } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{ويضرب المتفاوتتين التاليتين } 1 \leq 2x-1 \leq 5 \text{ و } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2} \text{ طرف$$

لطرف نجد

$$\frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2} \text{ يعني } 1 \times \frac{1}{4} \leq (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \leq 5 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{وسعة التأطير هي: } r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

تمرين 14: التطير و العمليات1. تحقق من أن: $14^2 < 200 < 15^2$ ثم استنتج أن: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ 2. بنفس الطريقة أوجد تطيرا للعدد $\sqrt{5}$.3. استنتج تطيرا للعددين $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ و $\sqrt{10}$.**الجواب:**(1) لدينا $14^2 = 196$ و $15^2 = 225$ ومنه $14^2 < 200 < 15^2$ لدينا $14^2 < 200 < 15^2$ إذن نستنتج أن: $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$ إذن: $14 < \sqrt{2} \times 10 < 15$ أي: $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ أي: $14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$ إذن نستنتج أن: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ (2) لدينا $22^2 = 484$ و $23^2 = 529$ ومنه $22^2 < 500 < 23^2$ لدينا $22^2 < 500 < 23^2$ إذن نستنتج أن: $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$ إذن: $22 < \sqrt{5} \times 10 < 23$ أي: $\sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$ أي: $22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10}$ إذن نستنتج أن: $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ (3) لدينا $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ و $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ إذن: $1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3$ أي: $3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$ و أيضا بضرب طرف طرف نجد: $1,4 \times 2,2 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1,5 \times 2,3$ أي: $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$ **III. القيمة المطلقة و خاصياتها:****(1) القيمة المطلقة لعدد حقيقي:**1. إذا كان $x \geq 0$ فإن: $|x| = x$ 2. إذا كان $x \leq 0$ فإن: $|x| = -x$ **أمثلة:** $|1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$ و $|\frac{3}{5}| = \frac{3}{5}$ و $|3| = 3$ و $|3 - \sqrt{5}| = 3 - \sqrt{5}$ و $|\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4$ **تمرين 15: القيمة المطلقة لعدد حقيقي**

أكتب بدون رمز القيمة المطلقة الأعداد التالية:

(1) $|\sqrt{2} - 2|$ (2) $|3 - 2\sqrt{3}|$ (3) $|\sqrt{5} - \sqrt{2}|$ (4) $A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$ **الجواب:**(1) لدينا $\sqrt{2} < 2$ إذن: $\sqrt{2} - 2 \in \mathbb{R}^-$ ومنه $|\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = -\sqrt{2} + 2$ (2) لدينا $3 < 2\sqrt{3}$ لأن: $3^2 < (2\sqrt{3})^2$ إذن: $3 - 2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^-$ ومنه $|3 - 2\sqrt{3}| = -(3 - 2\sqrt{3}) = -3 + 2\sqrt{3}$ (3) لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{2}$ إذن: $\sqrt{5} - \sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$ ومنه $|\sqrt{5} - \sqrt{2}| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$ (4) $A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$ $A = 4 - 2\sqrt{3} - (-5 + 3\sqrt{3}) + (9 - 5\sqrt{3})$ $A = 4 - 2\sqrt{3} + 5 - 3\sqrt{3} + 9 - 5\sqrt{3} - 9 = 0$ **(2) خاصيات:**• لكل x من \mathbb{R} لدينا $|x| \geq 0$ و $|x^2| = |x|^2 = x^2$ و $-|x| \leq x \leq |x|$.• لكل x من \mathbb{R} لدينا: $|\sqrt{x^2}| = |x|$ و $|x| = |-x|$.• لكل x و y من \mathbb{R} لدينا: $|x+y| \leq |x| + |y|$, $|xy| = |x||y|$.• إذا كان $y \neq 0$ فإن: $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$.• لكل a من \mathbb{R}^* $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$.• لكل x و y من \mathbb{R} لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$.**تمرين 16:**1. أحسب: $(3\sqrt{2} - 5)^2$ 2. قارن العددين: 5 و $3\sqrt{2}$ 3. بسط: $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$ **الجواب:** (1) $(3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + 5^2 = 18 - 30\sqrt{2} + 25 = 43 - 30\sqrt{2}$ (2) لمقارنة العددين نقارن مربعيهما: $18 = (3\sqrt{2})^2$ و $25 = (5)^2$ إذن $5 > 3\sqrt{2}$ ومنه $3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^-$ (3) $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 5)^2} = |3\sqrt{2} - 5|$ لأن $3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^-$ $= -(3\sqrt{2} - 5)$ وبالتالي $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} + 5$ **خاصية:** ليكن x من \mathbb{R} و r من \mathbb{R}_+ .• $|x| \leq r$ يكافئ $-r \leq x \leq r$ • $|x| \geq r$ يكافئ $x \geq r$ أو $x \leq -r$ **تطبيقات: (حل المعادلات)****تمرين 17:** حل في \mathbb{R} المعادلات التالية: (1) $|x-1| = 5$ (2) $|x+2| = -1$ (3) $|2x+1| = |x-3|$ **الجواب:** (1) $|x-1| = 5$ يعني $x-1 = 5$ أو $x-1 = -5$ يعني $x = 6$ أو $x = -4$ إذن: $S = \{-4; 6\}$ (2) المعادلة: $|x+2| = -1$ ليس لها حل في \mathbb{R} لأن القيمة المطلقة دائما موجبةإذن: $S = \emptyset$ (3) $|2x+1| = |x-3|$ يعني $2x+1 = x-3$ أو $2x+1 = -(x-3)$ يعني $x = -4$ أو $2x+1 = -x+3$ يعني $x = -4$ أو $x = \frac{2}{3}$ إذن: $S = \{-4; \frac{2}{3}\}$ **تطبيقات: (حل المترجمات)****تمرين 18:** حل في \mathbb{R} المترجمات التالية: (1) $|x-1| \leq 2$ (2) $|x+2| \geq 3$ (3) $|2x+1| < 6$ **الجواب:** (1) $|x-1| \leq 2$ يعني $-2 \leq x-1 \leq 2$ يعني $-1 \leq x \leq 3$ إذن: $S = [-1; 3]$ (2) $|x+2| \geq 3$ يعني $x+2 \geq 3$ أو $x+2 \leq -3$ يعني $x \geq 1$ أو $x \leq -5$ يعني $x \in [1; +\infty[$ أو $x \in]-\infty; -5]$ إذن: $S =]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$ (3) $|2x+1| < 6$ يعني $-6 < 2x+1 < 6$ يعني $-6-1 < 2x < 6-1$

$$\text{يعني } -7 < 2x < 5 \text{ يعني } -7 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 5 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني } -\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2} \text{ اذن: } s =]-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}[$$

تمرين 19: توظيف القيمة المطلقة

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث: $x \geq \frac{1}{2}$ و $y \leq 1$ و $x - y = 3$.

1. أحسب قيمة العدد E حيث: $E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2}$

2. بين أن: $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ و أن $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

3. أحسب قيمة العدد F حيث: $F = |x+y-5| + |x+y+2|$

الجواب: (1) $E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2} = |2x-1| + |2y-2|$

لدينا $x \geq \frac{1}{2}$ يعني $2x \geq 1$ يعني $2x-1 \geq 0$

ولدينا $y \leq 1$ يعني $2y \leq 2$ يعني $2y-2 \leq 0$

ومنه: $E = |2x-1| + |2y-2| = 2x-1 - (2y-2) = 2x-2y+1 = 2(x-y)+1$

$x - y = 3$ ونعلم أن $E = 2x - 2y + 1 = 2(3) + 1 = 7$

ومنه: $E = 2 \times 3 + 1 = 7$

(2) - نبين أن: $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

نعلم أن $x - y = 3$ اذن: $x = y + 3$

ولدينا $x \geq \frac{1}{2}$ اذن: $y + 3 \geq \frac{1}{2}$ اذن: $y \geq \frac{1}{2} - 3$

اذن: $y \geq -\frac{5}{2}$ وبما أن $y \leq 1$ فان $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

- نبين أن: $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

نعلم أن $x - y = 3$ اذن: $y = x - 3$

ووجنا سابقا أن: $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$

اذن: $-\frac{5}{2} \leq x - 3 \leq 1 + 3$ يعني $-\frac{5}{2} + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 1 + 3$

ومنه: $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

(3) حساب قيمة العدد F حيث: $F = |x+y-5| + |x+y+2|$

نبحث عن إشارة $x+y-5$

ووجنا سابقا أن: $-\frac{5}{2} \leq y \leq 1$ و أن $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

اذن: $-\frac{5}{2} \leq x+y \leq 1+4$ يعني $-2 \leq x+y \leq 5$

يعني $-2-5 \leq x+y-5 \leq 5-5$ يعني $-7 \leq x+y-5 \leq 0$

أي أن: $x+y-5$ سالب

نبحث عن إشارة $x+y+2$

وجنا سابقا أن: $-2 \leq x+y \leq 5$

يعني $-2+2 \leq x+y+2 \leq 5+2$ يعني $0 \leq x+y+2 \leq 7$

أي أن: $x+y+2$ موجب

اذن: $F = |x+y-5| + |x+y+2| = -(x+y-5) + x+y+2$

اذن: $F = -x-y+5 + x+y+2 = -x-y+5+x+y+2 = 7$

تعريف أخرى: ليكن a و b عنصرين من \mathbb{R} بحيث: $a < b$

$a - b$ تسمى طول أو سعة المجال $[a, b]$.

العدد $c = \frac{a+b}{2}$ يسمى مركز المجال $[a, b]$ و العدد $c = \frac{b-a}{2}$ يسمى شعاع المجال $[a, b]$.

ومنه $x \in [a, b]$ يكافئ $|x-c| \leq r$ يكافئ $c-r \leq x \leq c+r$.

مثال: من أجل المجال $[-2, 10]$ لدينا: العدد $12 - (-2) = 10$ هو طوله

والعدد $c = \frac{10-2}{2} = 4$ هو مركزه و العدد $r = \frac{12}{2} = 6$ هو شعاعه

اذن: $x \in [-2; 10]$ يكافئ $|x-4| \leq 6$.

IV. التقريبات والتقريب العشري:

(1) التقريبات: تعريف: ليكن a و x عنصرين من \mathbb{R} و r عددا حقيقيا موجبا قطعيا.

1. إذا كان $a \leq x \leq a+r$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتقريب.

2. إذا كان $a-r \leq x \leq a$, نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.

3. إذا كان $|x-a| \leq r$, نقول إن a قيمة مقربة (أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r .

خاصية: إذا كان $a \leq x \leq b$ تأطيرا للعدد x فان:

• العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بتقريب. و العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بإفراط.

• العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال 1: من التأطير $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$ نستنتج أن:

○ العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

○ العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

○ العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتقريب.

مثال 2: لدينا $\pi = 3,1415926 \dots$

سؤال: حدد قيمة مقربة للعدد π بالدقة 10^{-2} بتقريب و بإفراط

تمرين 20: التقريب العشري لعدد

أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب (استعمل المحسبة).

$$(\sqrt{10} \approx 3.16227766)$$

الجواب: $3.162 < \sqrt{10} < 3.163$

ولدينا: $3.163 - 3.162 = 0.001 = 10^{-3}$ اذن

• العدد 3.162 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

• العدد 3.163 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{10}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

(2) التقريب العشري لعدد حقيقي:

الجزء الصحيح لعدد حقيقي:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث:

$$E(x) = p, p \leq x < p+1$$

مثال: لدينا: $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ و منه فان $E(\sqrt{2}) = 1$

تمرين 21 أو مثال: أوجد التقريب العشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-4}

بتقريب (استعمل المحسبة). علما أن: $(\sqrt{3} \approx 1.732050808 \dots)$

الجواب: لدينا: $1,732 \leq \sqrt{3} < 1,733$

$$\text{أي } (1732) \cdot 10^{-3} \leq \sqrt{3} < (1732+1) \cdot 10^{-3}$$

اذن: $1,732$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بتقريب.

و $1,733$ هو تقريب عشري للعدد $\sqrt{3}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.

تمارين في الترتيب للبحث



تمرين 1: a و b عدنان حقيقيان بحيث: $-\frac{1}{2} < b < a$

- حدد إشارة كل من العددين $2a+1$ و $2b+1$.
- قارن العددين: 1 و $\frac{2a+1}{2b+1}$.
- استنتج ترتيباً للأعداد: 1 و $\frac{2a+1}{2b+1}$ و $\frac{2b+1}{2a+1}$.

تمرين 2: التأطير و العمليات

ليكن x عنصراً من المجال $]\frac{1}{2}, 1[$, نضع: $A = \frac{x}{x+2}$

- حدد تأطيراً للعدد $x+2$ ثم استنتج تأطيراً للعدد A محدداً سعته.
- تحقق من أن: $A = 1 - \frac{2}{x+2}$
- حدد تأطيراً للعدد A سعته $\frac{2}{15}$.

تمرين 3: تحديد قيمة مقربة لعدد

ليكن a عنصراً من المجال المغلق الذي مركزه 1 و شعاعه $\frac{1}{2}$.

- تحقق من أن: $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$
- حدد قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{a}$ بالدقة $\frac{2}{3}$.

تمرين 4: ليكن a عدد حقيقي حيث: $a \geq 1$

1) بين أن $a \geq \sqrt{2a-1}$

2) نضع $A = \sqrt{a-\sqrt{2a-1}} - \sqrt{a+\sqrt{2a-1}}$

أ- حدد إشارة A

ب- احسب قيمة A في حالة $a=1$ ثم في حالة $a=5$

ج- بين أنه لكل a من المجال $[1, +\infty[$ لدينا $A^2 = 2$ ثم استنتج A

تمرين 5: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث:

$$|y+1| \leq 3 \cdot 10^{-2} \text{ و } 3,13 \leq x \leq 3,17$$

1) بين أن $-1,03 \leq y \leq -0,97$

2) حدد تأطيراً للعدد $(y-3)^2$

3) أطر العدد xy

تمرين 6: a و b عدنان حقيقيان بحيث:

$$ab = 1 \text{ و } b < \frac{1}{2} \text{ و } a < 3$$

1) بين أن $2 < a < 3$ ثم استنتج أن: $\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$

2) بين أن $1 < \frac{1}{a-2b} < \frac{3}{7}$

3) تحقق أن $\frac{5}{7}$ قيمة مقربة للعدد $\frac{1}{a-2b}$ بالدقة $\frac{2}{7}$

تمرين 7: نضع $A = \sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{3+\sqrt{5}}$ و $B = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

- حدد إشارة A
- بين أن $A^2 = 2$ ثم استنتج A
- حدد إشارة B
- أحسب B^2 ثم استنتج B

تمرين 8: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث:

$$-1 < y < 0 \text{ و } |x-2| < 1$$

- بين أن $1 \leq x \leq 3$
- حدد تأطيراً للعدد $x+y$ و $x \times y$
- حدد إشارة: $x+y - \sqrt{x^2+y^2}$

تمرين 9: ليكن x عدداً حقيقياً نضع: $A = x^2 + 4x$

$$\text{بين أن } |A| < 8$$

تمرين 10: ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث:

$$|x| < \frac{1}{2} \text{ و } |y-2| < \frac{1}{2} \text{ بين أن } \frac{2y}{y-x} \leq 5$$

تمرين 11: ليكن a و b عنصريين من \mathbb{R}_+^* .

- قارن: $\frac{ab}{5a+b}$ و $\frac{5a+b}{20}$
- ثم استنتج أن: $\frac{ab}{5a+b} + \frac{bc}{5b+c} + \frac{ac}{5c+a} \leq \frac{3}{10}(a+b+c)$

تمرين 12: ليكن a و b عدنان حقيقيان بحيث: $a < 1$ و $b < 1$

1. قارن: 8 و $\frac{a^2}{a-1}$ بدراسة الفرق

2. ثم استنتج أن: $\frac{a^2}{a-1} + \frac{b^2}{b-1} \leq 8$

تمرين 13:

- ليكن x عنصراً من المجال $]-\infty, -2[$,
- قارن: 5 و $-3x-1$ باستعمال خصائص الترتيب
- ليكن x عنصراً من المجال $]-4, +\infty[$,
- قارن: 9 و $-2x+1$ باستعمال خصائص الترتيب

انتهى الدرس

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron »
dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et
exercices que l'on devient un mathématicien

ملاحظات عامة حول الدرس: