

### ملخص درس النهايات

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0^-$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-4}{-2x+6} = +\infty$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{-2x+6} = -\infty$

### III. العمليات على النهايات

في كل ما يلي  $a$  عدد حقيقي أو يساوي  $+\infty$  أو  $-\infty$  و  $l$  و  $l'$  عدنان حقيقيان وهذه العمليات تبقى صالحة على اليمين و اليسار

#### (1) النهاية و الجمع:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

**مثال:** أحسب النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

**الجواب:**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 7 = 7$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$  ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

#### (2) النهاية و الضرب:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$0$	$0$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد	

#### (3) النهاية و المقلوب:

$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	$0^+$	$0^-$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x)$	$\frac{1}{l'}$	$0$	$0$	$+\infty$	$-\infty$

#### (4) النهاية و الخارج:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$0^+$	$0^+$	$0^-$	$0^-$	$< 0$	$> 0$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد	

#### (5) نهاية الدالة الحدودية

نهاية دالة حدودية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$  هي نهاية حدها الأكبر درجة

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4$

**الجواب:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 5x - 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

#### (6) نهاية الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عندما تؤول  $x$  إلى  $+\infty$  أو إلى  $-\infty$  هي خارج نهاية حدها الأكبر درجة.

**مثال:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4}$

**الجواب:**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^2 + 1}{x^4 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$

### I. نهايات اعتيادية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ إذا كان } n \text{ زوجي} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = -\infty \text{ إذا كان } n \text{ فردي}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ وتقرأ النهاية عندما يؤول } x \text{ إلى } 0 \text{ على اليمين}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ وتقرأ النهاية عندما يؤول } x \text{ إلى } 0 \text{ على اليسار}$$

**خاصية:** لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  عددا حقيقيا

إذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  في  $+\infty$  (أو في  $-\infty$ ) فان هذه النهاية وحيدة.

### II. النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين

فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ "

إذا كانت  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليسار

فإننا نكتب: " $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ " أو " $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ "

**نهايات اعتيادية:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$  •  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \cdot \forall n \in \mathbb{N}^* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

• إذا كان  $n$  زوجي غير منعدم, فان  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان  $n$  فردي غير منعدم, فان  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$

**مثال:** أحسب النهايات التالية: (1)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6}$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3^{\pm}} \frac{x-4}{-2x+6}$$

**أجوبة:** (1)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x + 1 = 9 + 1 = 10$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$2x-6$	$-$	$0$	$+$

ومنه:  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+1}{2x-6} = +\infty$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x - 6 = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x+1}{2x-6} = -\infty \text{ وبالتالي } \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x - 6 = 0^-$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3^+} -2x + 6 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 4 = -1$$

$x$	$-\infty$	$3$	$+\infty$
$-2x+6$	$+$	$0$	$-$