

ملخص وقواعد في الرياضيات

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل: مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

ملخص درس الدوال الأسية

(4) النهايات: خاصية 1: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و **خاصية 2:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

مثال: أحسب النهايات الآتية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} \quad (2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1})$$

شكل غير محدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} = \frac{+\infty}{+\infty}$ (الحل: 1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(2 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}} = \frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$$

شكل غير محدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} = \frac{+\infty}{+\infty}$ (2)

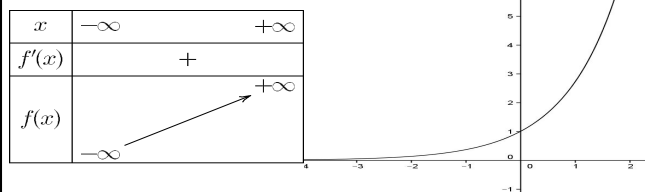
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{3}{e^x}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

(5) مشتقة الدالة: $x \mapsto e^x$

نقبل أن الدالة exp قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}

ولدينا: $(e^x)' = e^x$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

(6) جدول تغيرات ومنحنى الدالة $x \mapsto e^x$:



دراسة دالة مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = e^x + 3x$$

(1) حدد D_f (2) أحسب $f(0)$ و $f(1)$ (أعط قيمة مقربة للنتائج)

(3) أحسب $f'(x)$ وأدرس إشارتها

(4) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(5) حدد جدول تغيرات الدالة f

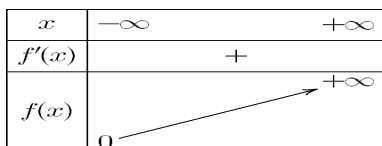
(الحل: 1) $D_f = \mathbb{R}$ (2) $f(0) = e^0 + 3 \times 0 = 1 - 0 = 1$ (3) $f(1) = e^1 + 3 \times 1 = e + 3 \approx 2,7 + 3 = 5,7$

(3) $f'(x) = (e^x + 3x)' = (e^x)' + (3x)' = e^x + 3 > 0$

لأن: $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0$ ومنه f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

(4) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 3x = 0 + 3(-\infty) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 3x = +\infty + 3(+\infty) = +\infty$



(5) جدول تغيرات الدالة f

(1) تعريف: الدالة الأسية النيبيرية يرمز لها ب exp وهي معرفة على

$$\mathbb{R} \text{ ب: } (\forall x \in \mathbb{R}); \exp x = e^x$$

(2) خاصيات: الدالة exp تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

$$e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \text{ لكل } x \text{ و } y \text{ من } \mathbb{R}$$

$$e^1 = e \text{ و } e^0 = 1$$

$$(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in]0; +\infty[), (x = e^y \Leftrightarrow \ln(x) = y)$$

$$\text{مثال: } x = \ln 2 \Leftrightarrow e^x = 2$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}); \ln(e^x) = x$$

(3) خاصيات جبرية: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ و } e^x \times e^y = e^{x+y} \text{ و } (\forall x \in \mathbb{R}) e^x > 0$$

$$e^{rx} = (e^x)^r \text{ و } \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$$

مثال 1: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$\frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e \quad (4) \quad e^{1+x} = \frac{1}{e^{2x-3}} \quad (3) \quad e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad (2) \quad e^{x+1} = 4 \quad (1)$$

(الحل: 1) $e^{1-x+2x} = e^1 \Leftrightarrow e^{1-x} \times e^{2x} = e$

$$S = \{0\} \quad (2) \quad e^{x-2} = e^1 \Leftrightarrow e^{x-2} = e$$

$$S = \{3\} \quad (3) \quad e^{1+x} = e^{-2(x-3)} \Leftrightarrow e^{1+x} = \frac{1}{e^{2x-3}}$$

$$3x = 2 \Leftrightarrow 1+x = -2x+3 \Leftrightarrow e^{1+x} = e^{-2x+3}$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\} \quad (4) \quad e^{(2x+1)-(x-3)} = e^1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$$

$$e^{2x+1-x+3} = e^1 \Leftrightarrow$$

$$x = -3 \Leftrightarrow x+4=1 \Leftrightarrow 2x+1-x+3=1 \Leftrightarrow$$

$$S = \{-3\} \text{ ومنه:}$$

مثال 2: حدد مجموعة تعريف الدالة f : $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

(الحل: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\}$)

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad (3) \quad e^x = e^0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$$

مثال 3: حل في \mathbb{R} المتراحة التالية:

$$e^{7x-1} \geq e^{2x-3} \times e^{x-2}$$

(الحل: $e^{7x-1} \geq e^{2x-3+x-2} \Leftrightarrow e^{7x-1} \geq e^{2x-3} \times e^{x-2}$)

$$4x \geq -4 \Leftrightarrow 7x-1 \geq 2x-3+x-2 \Leftrightarrow$$

$$S = [-1; +\infty[\text{ ومنه: } x \geq -1 \Leftrightarrow$$