ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

درس الأعداد العقدية الجزء الأول:

- **الكتابة** $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد z, و يرمز له بالرمز $\mathrm{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد z, و يرمز له ب: $\mathrm{Im}(z)$

$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ و $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$.

- z عدد حقيقي إذا وفقط إذا كان: $z=\bar{z}$
- z عدد تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان: $\bar{z}=-z$.
- لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو العدد العقدي z_B-z_A و نكتب $z_{\overrightarrow{AB}}=z_A-z_B$
- لحق النقطة I منتصف $[AB]$ هو العدد العقدي z_I بحيث: $z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
- تكون A و B و C نقطا مستقيمية إذا و فقط إذا كان: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عددا حقيقيا
- العدد العقدي $x-iy$ يسمى مرافق العدد العقدي $z=x+iy$ ونرمز له ب $\bar{z}$.
- ليكن z و z' عددين عقديين و n عددا صحيحا نسبيا,لدينا:

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$, $\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\bar{z}}$ و $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)}=\frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$, $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\bar{z}\right)^n$

- معيار $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان.هو العدد الوجب: $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$
- لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي, لحقهما على التوالي z_A و z_B. لدينا: $\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A|$.
- $|\bar{z}|=|-z|=|z|$ و $|z|=0\Leftrightarrow z=0$ و $|z\times z'|=|z|\times|z'|$
- إذا كان $z\neq 0$ فإن: $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$
- إذا كان $z\neq 0$ فإن لكل عدد صحيح نسبي n: $|z^n|=|z|^n$ و $\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right|=\frac{AB}{AC}$
- و نرمز ل عمدة العدد العقدي z ب $\arg z$ و لدينا:

$\arg z\equiv\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$.

- ليكن z عددا عقديا غير منعدم,لدينا:

$z\in\mathbb{R}^{*+}\Leftrightarrow \arg z\equiv 0[2\pi]$

$z\in\mathbb{R}^{*-}\Leftrightarrow \arg z\equiv \pi[2\pi]$.

$k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=0$ أو $\arg z=k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

عمدة عدد تخيلي صرف: ليكن y عددا حقيقيا غير منعدم,لدينا:

- إذا كان $y\succ 0$ فإن: $\arg(iy)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- إذا كان $y\prec 0$ فإن: $\arg(iy)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- ليكن z عددا عقديا غير منعدم, لدينا:

- $\arg\bar{z}\equiv-\arg z[2\pi]$ و $\arg(-z)\equiv\pi+\arg z[2\pi]$
- **الكتابة** $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $r=|z|$ و $\theta\equiv\arg z[2\pi]$ تسمى شكلا مثلثيا للعدد العقدي z

❖ ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين, لدينا:

1) $\arg(z\times z')\equiv\arg z+\arg z'[2\pi]$ 2) $\arg\left(\frac{1}{z}\right)\equiv-\arg z[2\pi]$

3) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)\equiv\arg z-\arg z'[2\pi]$

4) $\arg\left(z^n\right)\equiv n\arg z[2\pi]$ لكل $n\in\mathbb{Z}$

❖ ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين, بحيث:

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $z'=r(\cos\theta'+i\sin\theta')$

مع $r\succ 0$ و $r'\succ 0$,لدينا:

- $-z=r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi))$ و $\bar{z}=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$
- $z\times z'=rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$
- $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ و $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}(\cos(\theta'-\theta)+i\sin(\theta'-\theta))$
- $z^n=r^n\left(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)\right)$ لكل n من $\mathbb{Z}$.

❖ لتكن A و B و C و D نقطا من المستوى العقدي مثنى مثنى, ألحاقها على التوالي z_A و z_B و z_C و z_D , لدينا:

- $\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\arg(z_A-z_B)[2\pi]$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_D-z_c}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$
- تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان:
- $\arg\left(\frac{z_A-z_c}{z_B-z_c}\right)\equiv 0[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A-z_c}{z_B-z_c}\right)\equiv\pi[2\pi]$.
- يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان إذا كان:

$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv 0[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv\pi[2\pi]$.

- يكون المستقيمان (AB) و (CD) متعامدين إذا كان:

$\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أو $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_D}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

- **التمثيل العقدي للإزاحة و التحاكي و الدوران**

لتكن $M(z)$ و $M'(z')$ نقطتين من المستوى العقدي

o **التمثيل العقدي للإزاحة:** لتكن $t_{\vec{u}}$ الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$

$t_{\vec{u}}(M)=M'\Leftrightarrow z'=z+a$ حيث $z_{\vec{u}}=a$ هو لحق المتجهة $\vec{u}$

o **التمثيل العقدي للتحاكي:** لتكن $h(\Omega;k)$ التحاكي الذي مركزه $\Omega(z_\Omega)$ ونسبته k :

$h(M)=M'\Leftrightarrow z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$

التمثيل العقدي للدوران : ليكن $R(\Omega;\alpha)$ الدوران مركزه $\Omega(z_\Omega)$ وزاويته α : $R(M)=M'\Leftrightarrow z'-z_\Omega=e^{i\alpha}(z-z_\Omega)$