

مستوى : السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 7 في درس الأعداد العقدية (1)

محتوى البرنامج

- مجموعة الأعداد العقدية
- التمثيل الهندسي لعدد عقدي (لح نقطة ومتجهة)
- الكتابة الجبرية لعدد عقدي
- العمليات على الأعداد العقدية
- مرافق عدد عقدي والخصائص
- معيار عدد عقدي والخصائص
- مرافق عدد عقدي والخصائص
- العمدة و الشكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم و الخصائص
- زاوية متجهتين و عمدة خارج لحقيهما
- التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي و الدوران

القدرات المنتظرة

- التمكن من الحساب على الأعداد العقدية
- الانتقال من الكتابة الجبرية إلى الكتابة المثلثية والعكس
- التعرف على الصيغ المثلثية الأساسية باستعمال الأعداد العقدية
- تطبيق الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية (الاستقامة التعمد والتعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي و الدوران)

I. المجموعة C

تعريف: كل عدد يكتب على الشكل $x + iy$, حيث عدنان حقيقيان و i العدد التخيلي الذي يحقق $i^2 = -1$, يسمى عددا عقديا. مجموعة الأعداد العقدية يرمز لها بالرمز \mathbb{C} . و لدينا:
 $i^2 = -1$ حيث $\mathbb{C} = \{x + iy / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

II. الكتابة الجبرية لعدد عقدي

خاصية و تعريف

- كل عدد عقدي z يكتب بكيفية وحيدة على الشكل $x + iy$, حيث x و y عدنان حقيقيان,
- الكتابة $z = x + iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي z .
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد z , و يرمز له بالرمز $\text{Re}(z)$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد z , و يرمز له بالرمز $\text{Im}(z)$.

خاصية: يكون عدنان عقديان z و z' متساويين اذا و فقط اذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

$$\text{Im}(z) = \text{Im}(z') \text{ و } \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \Leftrightarrow z = z'$$

ملاحظة: جميع قواعد الحساب المتعلقة بالعمليات في \mathbb{R} , تمتد الى

المجموعة \mathbb{C} , مع استعمال $i^2 = -1$.

تمرين 1: أكتب الأعداد العقدية التالية على شكلهم الجبري أو الديكارتي:

$$z_2 = (1 + i\sqrt{3})^3 \text{ و } z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2$$

$$z_5 = (1+i)^{10} \text{ و } z_4 = \frac{1+i}{3-i} \text{ و } z_3 = \frac{1-3i}{3-i}$$

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 = -2+2i-i-1+4i-4 = -4+5i-4 = -8+5i$$

$$\text{Im}(z_1) = 5 \text{ و } \text{Re}(z_1) = -6 : \text{ ومنه } z_1 = -6+5i = a+bi$$

$$z_2 = (1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3 = 2$$

$$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(z_2) = 0 : \text{ لأن}$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$$

$$\text{Im}(z_3) = -\frac{4}{5} \text{ و } \text{Re}(z_3) = \frac{3}{5} : \text{ ومنه } z_3 = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5}$$

$$z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + \frac{5i}{13}$$

$$z_5 = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (2i)^5 = (2^5) \times (i)^5 = 32 \times (i)^4 \times i = 32i$$

III. التمثيل الهندسي لعدد عقدي:

تعريف: المستوى (P) منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$(O; \vec{u}; \vec{v})$$

كل عدد عقدي $z = x + iy$, حيث x و y عدنان حقيقيان, يربط

بالنقطة M التي زوج احداثياتها $(x; y)$ في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نقول ان: M صورة العدد العقدي z , و نكتب: $M(z)$.

\overline{OM} المتجهة الصورة للعدد العقدي z , و نكتب: $\overline{OM}(z)$.

كل نقطة $M(x; y)$ من المستوى (P) , هي صورة العدد العقدي

$z = x + iy$ نقول ان: z لحق النقطة M و نكتب z_M أو لحق المتجهة

$$\overline{OM} \text{ و نكتب } \overline{z_{OM}}$$

المستوى (P) المنسوب الى المعلم المتعامد الممنظم المباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ و يسمى المستوى العقدي.

1. مصطلحات:

كل عدد عقدي يكتب على شكل iy , حيث y عدد حقيقي, يسمى عددا تخيليا صرفا
محور الأفاصيل يسمى المحور الحقيقي و محور الأراتيب يسمى المحور التخيلي

2. لحن متجهة

تعريف: لحن متجهة \vec{u} هو لحن النقطة M بحيث: $\vec{OM} = \vec{u}$, أي:
إذا كانت $\vec{u}(a, b)$ فان لحن المتجهة \vec{u} هو العدد العقدي $a + ib$.

خاصية: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي لحاقهما z_A و z_B على التوالي,

فان لحن المتجهة \vec{AB} هو العدد العقدي $z_B - z_A$

مثال 1: نعتبر في المستوى العقدي النقط: $A(-2; 1)$ و $B(-3; -1)$ و $C\left(\frac{1}{2}; -2\right)$

ما ألقاق النقط A و B و C ؟

مثال 2: نعتبر في المستوى العقدي النقط A, B, C, D, E

ألقاقهم على التوالي: $z_A = 1 + i$ و $z_B = 3 + 2i$

$z_C = 2 - i$ و $z_D = -2i$ و $z_E = 2$

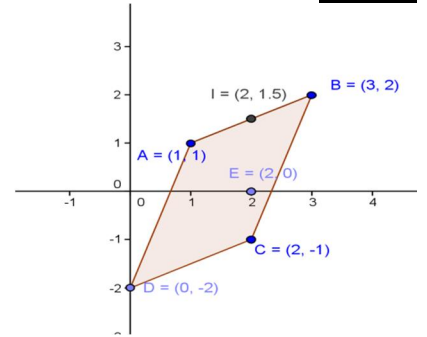
1. مثل النقط A, B, C, D, E في المستوى العقدي

2. حدد z_I لحن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$

3. حدد $z_{\vec{AB}}$ لحن المتجهة \vec{AB}

4. بين أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع

أجوبة: (1)



2) I منتصف القطعة $[AB]$ يعني $\vec{AI} = \vec{IB}$

يعني $z_{\vec{AI}} = z_{\vec{IB}}$ يعني $z_I - z_A = z_B - z_I$ يعني $z_I = \frac{z_B + z_A}{2}$

ومنه: $z_I = \frac{3+2i+1+i}{2} = 2 + \frac{3}{2}i$ ومنه: $I\left(2; \frac{3}{2}\right)$

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (1 + i) = 3 + 2i - 1 - i = 2 + i$

4) يكفي أن نبين أن: $\vec{AB} = \vec{DC}$

لدينا: $z_{\vec{AB}} = 2 + i$ نحسب $z_{\vec{DC}} = ?$

$z_{\vec{DC}} = z_C - z_D = 2 - i - (-2i) = 2 + i$

ومنه: $z_{\vec{AB}} = z_{\vec{DC}}$ ومنه: $\vec{AB} = \vec{DC}$ وبالتالي $ABCD$ متوازي الأضلاع

IV. تطبيقات

■ لحن منتصف قطعة

خاصية: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي لحاقهما z_A و z_B على التوالي, فان لحن النقطة I منتصف $[AB]$ هو العدد العقدي z_I

$$\text{بحيث: } z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

■ استقامية ثلاث نقط من المستوى العقدي

خاصية

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي بحيث $A \neq C$ وألقاقها z_A و z_B و z_C على التوالي.

تكون A و B و C نقطا مستقيمة إذا و فقط إذا كان: $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$ عددا حقيقيا.

مثال: نعتبر النقط: $A(1+i)$ و $B\left(\frac{1}{2} + 2i\right)$ و $C(-1-i)$

هل النقط A و B و C مستقيمة؟

$$\text{الجواب: } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{1}{2} + 2i - i}{-1 - i - i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-1 - 2i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-2\left(\frac{1}{2} + i\right)} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

أذن: النقط A و B و C مستقيمة

V. مرافق عدد عقدي

1. تعريف

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا و حيث x و y عددان حقيقيان.

العدد العقدي $x - iy$ يسمى مرافق العدد العقدي z ونرمز له بالرمز \bar{z} .

أمثلة: $z_1 = 5 - 2i$ اذن: $\bar{z}_1 = 5 + 2i$

$$\bar{-7} = -7; \bar{2i} = -2i; \overline{-5 - 3i} = -5 + 3i; \overline{3 + 2i} = 3 - 2i$$

2. نتائج

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا, حيث x و y عددان حقيقيان, لدينا:

$$\bar{\bar{z}} = z \quad \text{و} \quad \overline{z\bar{z}} = x^2 + y^2 \quad (\text{عدد حقيقي موجب})$$

$$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \quad \text{و} \quad z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$$

خاصية

ليكن z عددا عقديا لدينا:

1. z عدد حقيقي اذا و فقط اذا كان: $\bar{z} = z$

2. z عدد تخيلي صرف اذا و فقط اذا كان: $\bar{z} = -z$

3. المرافق و العمليات في المجموعة \mathbb{C} .

خاصية: ليكن z و z' عددين عقديين و n عددا صحيحا نسبيا, لدينا:

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'} \quad \text{و} \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \quad \text{حيث } z \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}} \quad \text{و} \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

تمرين 2: ليكن z عددا عقديا.

حدد و أكتب بدلالة \bar{z} مرافقات الأعداد العرقية التالية: $Z_1 = (2+i)(5-i)$

$$Z_2 = 2z + 5i \quad \text{و} \quad Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$$

أجوبة: (1) $\bar{Z}_1 = \overline{(2+i)(5-i)} = \overline{(2+i)} \times \overline{(5-i)} = (2-i)(5+i)$

$$\bar{Z}_2 = \overline{2z + 5i} = \overline{2z} + \overline{5i} = 2\bar{z} - 5i$$

$$\bar{Z}_3 = \overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i}\right)} = \frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}+i} = \frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$$

تمرين 3: حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلتين:

$$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad .1$$

$$z = 2\bar{z} - 2 + 6i \quad .2$$

أجوبة (1): $z \in \mathbb{C}$ يعني $\exists x \in \mathbb{R}$ و $\exists y \in \mathbb{R}$ بحيث $z = x + yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 4i \Leftrightarrow 2z + i\bar{z} = 5 - 4i$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow (2x + y) + i(2y + x) = 5 - 4i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x + 2x + y = 8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x = 8 \end{cases}$$

وبتعويض y بقيمتها في المعادلة 1 نجد: $x = \frac{14}{3}$

$$\text{ومنه: } S = \left\{ \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \right\}$$

(2) بنفس الطريقة نستعمل الكتابة الجبرية: $z = x + yi$ فنجد:

$$x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i \Leftrightarrow z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -2 \\ 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 3iy = -2 + 6i \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } S = \{2 + 2i\}$$

تمرين 4: نعتبر في المستوى العقدي العدد العقدي U

ولتكن M صورة العدد العقدي z ونضع: $U = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$

نضع: $z = x + yi$ حيث $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$

(1) حدد بدلالة x و y الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد العقدي U

(2) حدد مجموعة النقط M ذات اللق z بحيث يكون:

(أ) عددا حقيقيا

(ب) عددا تخيليا صرف

أجوبة (1): $z = x + yi$ إذن: $U = (x + yi - 2i)(x - yi - 1)$

يعني $U = (x + i(y - 2))((x - 1) - yi)$ وبعد النشر نجد:

$$U = (x^2 + y^2 - x - 2y) + i(-y - 2x + 2)$$

ومنه: $\text{Re}(U) = x^2 + y^2 - x - 2y$ و $\text{Im}(U) = -y - 2x + 2$

(2) (أ) U عدد حقيقي يعني $\text{Im}(U) = 0$ يعني $-y - 2x + 2 = 0$ (Δ)

إذن مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته: $-y - 2x + 2 = 0$

(ب) U عدد تخيلي صرف يعني $\text{Re}(U) = 0$ يعني $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$

$$x^2 - 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

إذن مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها

$$R = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ وشعاعها } \Omega \left(\frac{1}{2}; 1\right):$$

VI معيار عدد عقدي

1. تعريف

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا، حيث x و y عدنان حقيقيان.

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي z ، و نرمز له

$$\text{بالرمز } |z| \text{ ولدينا: } \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ملحوظة

$$(\forall z \in \mathbb{C}), |z| \in \mathbb{R}^+ \text{ و } |z|^2 = z\bar{z}$$

مثال 1: حدد معيار للعدد: $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{الجواب: } |z| = \left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

أمثلة أخرى:

$$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5; |-2i| = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

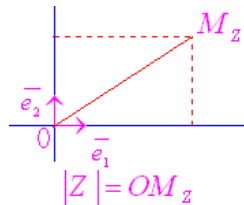
2. التأويل الهندسي

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لهما $z = x + iy$ و x و y عدنان

حقيقيان

$$\text{لدينا: } M(x; y) \text{ و منه: } \|\overline{OM}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

إذن معيار العدد العقدي z هو المسافة OM ، أي: $OM = |z|$.



خاصية

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي، لهما على التوالي z_A و z_B .

$$\text{لدينا: } z_B, \|\overline{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$$

البرهان

نعتبر النقطة M التي تحقق: $\overline{OM} = \overline{AB}$.

لدينا: $z_M = z_B - z_A$ حيث z_M لاق النقطة M . إذن:

$$|z_B - z_A| = |z_M| = OM = AB$$

تمرين 5: نعتبر في المستوى العقدي $(o; i, j)$ النقط A, B, C

ألحاقهم على التوالي: $z_A = 2$ و $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ و $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

الجواب: يكفي أن نبين أن $AC = AB = BC$

$$AB = |z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + i\sqrt{3} - 2| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + i\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}i| = |2 - i\sqrt{3}| = 2$$

ومنه: $AC = AB = BC$ وبالتالي: المثلث ABC متساوي الأضلاع.

3. خاصيات

■ لكل عددين عقديين z و z' ، لدينا:

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \text{ و } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ و } |\bar{z}| = |-z| = |z|$$

$$\text{■ إذا كان } z \neq 0 \text{ فان: } \frac{|z'|}{|z|} = \frac{|z'|}{|z|} \text{ و } \frac{|1|}{|z|} = \frac{1}{|z|}$$

$$\text{■ إذا كان } z \neq 0 \text{ فان لكل عدد صحيح نسبي } n: |z^n| = |z|^n$$

$$\text{و } |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

تمرين 6: حدد معيار كل من الأعداد العقدية التالية:

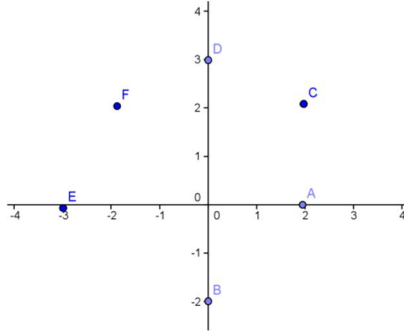
$$z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3 \text{ و } z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) \text{ و } z_1 = 5(1+i\sqrt{3})$$

$$\text{الجواب: } |z_1| = |-5(1+i\sqrt{3})| = |-5| |1+i\sqrt{3}| = 5\sqrt{1+3} = 10$$

$$|z_2| = |(1+i)(\sqrt{3}-i)| = |1+i| \times |\sqrt{3}-i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C و z_D و z_E و z_F

الجواب:



$$\arg z_B = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ و } \arg z_A = 0 [2\pi]$$

$$\arg z_D = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ و } \arg z_C = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\arg z_F = \frac{3\pi}{4} [2\pi] \text{ و } \arg z_E = \pi [2\pi]$$

ملحوظة: العدد العقدي 0 ليس له عمدة

نتائج

• **عمدة عدد حقيقي:**

ليكن z عددا عقديا غير منعدم لدينا:

$$z \in \mathbb{R}^{++} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0 [2\pi]$$

$$z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi [2\pi]$$

$$k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = 0 \text{ أو } \arg z = k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

• **عمدة عدد تخيلي صرف:**

ليكن y عددا حقيقيا غير منعدم لدينا:

$$\arg(iy) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ إذا كان } y > 0$$

$$\arg(iy) = -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ إذا كان } y < 0$$

خاصية: ليكن z عددا عقديا غير منعدم لدينا:

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi] \quad \circ$$

$$\arg \bar{z} \equiv -\arg z [2\pi] \quad \circ$$

تمرين: حدد عمدة العدد العقدي z في كل حالة من الحالات التالية:

$$z_1 = 5i \quad \text{و} \quad z_2 = -1$$

$$z_3 = -3i \quad \text{و} \quad z_4 = 2$$

2. شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

تعريف: ليكن z عددا عقديا غير منعدم،

الكتابة $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $r = |z|$ و $\theta \equiv \arg z [2\pi]$ تسمى

شكلا مثلثيا للعدد العقدي z

مثال 1: حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$

$$\text{لدينا: } |z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

مثال 2: حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: $z_2 = 1 - i$

$$\text{لدينا: } |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ونستعمل القاعدة التالية: $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

$$|z_3| = \left| \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^3 \right| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right|^3 = \left(\frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|} \right)^3 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^3 = 2\sqrt{2}$$

$$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} \right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

تمرين 7: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$$|z-1-2i| = |z-7+2i|$$

الجواب: طريقة 1: (طريقة تحليلية)

$z \in \mathbb{C}$ يعني $\exists y \in \mathbb{R}$ و $\exists x \in \mathbb{R}$ بحيث: $z = x + yi$

$$|x+yi-1-2i| = |x+yi-7+2i| \text{ يعني } |z-1-2i| = |z-7+2i|$$

$$|x-1+i(y-2)| = |x-7+i(y+2)| \text{ يعني}$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \text{ يعني}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2 \text{ يعني}$$

$$12x - 8y - 48 = 0 \text{ يعني } x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$$

$$\text{يعني } (\Delta): 3x - 2y - 12 = 0$$

ان مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) الذي معادلته: $3x - 2y - 12 = 0$

طريقة 2: (طريقة هندسية)

$$|z - (1+2i)| = |z - (7-2i)| \text{ يعني } |z-1-2i| = |z-7+2i|$$

$$\text{نضع: } A(z_A = 1+2i) \text{ و } B(z_B = 7-2i)$$

$$\text{ان: } |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \text{ يعني } AM = BM$$

ان مجموعة النقط هي المستقيم (Δ) واسط القطعة $[AB]$

تمرين 8: تحديد (Δ) مجموعة النقط M التي لحقها z بحيث:

$$|z-2i|=3$$

الجواب: طريقة 1: (طريقة تحليلية)

$z \in \mathbb{C}$ يعني $\exists y \in \mathbb{R}$ و $\exists x \in \mathbb{R}$ بحيث: $z = x + yi$

$$|x+i(y-2)| = 3 \text{ يعني } |x+yi-2i| = 3 \text{ يعني } |z-2i| = 3$$

$$\text{يعني } \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = 3 \text{ يعني } \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3$$

ان مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها $\Omega(0,2)$ وشعاعها

$$R=3$$

طريقة 2: (طريقة هندسية)

$$|z-2i|=3 \text{ نضع: } A(z_A = 2i)$$

$$\text{ان: } |z_M - z_A| = 3 \text{ يعني } AM = 3$$

ان مجموعة النقط هي الدائرة (C) الذي مركزها A : وشعاعها $R=3$

VII. عمدة و شكل مثلثي لعدد عقدي غير منعدم

1. عمدة عدد عقدي غير منعدم

تعريف

ليكن z عددا عقديا غير منعدم و M صورته في المستوى العقدي

نسمى عمدة العدد العقدي z أحد قياسات الزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overline{OM})$

و نرمز له بالرمز $\arg z$, و نكتب: $\arg z \equiv (\vec{u}; \overline{OM}) [2\pi]$.

تمرين: نعتبر النقط A و B و C و D و E و F التي ألقاها على التوالي:

$$z_D = 3i \text{ و } z_C = 2 + 2i \text{ و } z_B = -2i \text{ و } z_A = 2$$

$$z_F = -2 + 2i \text{ و } z_E = -3$$

أنشئ النقط A و B و C و D و E و F

باستعمال التمثيل في المستوى العقدي حدد عمدة كل عدد من

2. أكتب Z على الشكل الجبري ثم استنتج $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$.

$$z_1 = \sqrt{3} - i \quad \text{(الأجوبة: 1)}$$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

$$z_1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$$

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x) = \cos x$ و $\sin(-x) = -\sin x$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right)}{\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)} = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right)$$

$$Z = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i} = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i - i + 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \end{cases}$$

VIII. زاوية متجهتين و عمدة خارج لحيتهما

1. خاصية

لتكن A و B و C و D نقطة من المستوى العقدي مثنى مثنى ألقاها على التوالي. z_A و z_B و z_C و z_D , لدينا:

$$\arg(\vec{u}; \overline{AB}) \equiv \arg(z_A - z_B) [2\pi]$$

$$\arg(\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$$

$$\arg(\overline{AB}; \overline{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$$

2. **نتائج:** لتكن A و B و C و D نقطة من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى، ألقاها. z_A و z_B و z_C و z_D , لدينا:

❖ استقامة ثلاث نقط

تكون النقط. A و B و C مستقيمة إذا و فقط إذا كان:

$$\arg \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right) \equiv 0 [2\pi] \text{ أو } \arg \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right) \equiv \pi [2\pi]$$

❖ توازي مستقيمين

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان إذا و فقط إذا كان:

$$\arg \left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \right) \equiv 0 [2\pi] \text{ أو } \arg \left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D} \right) \equiv \pi [2\pi]$$

❖ تعامد مستقيمين

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متعامدين إذا و فقط إذا كان:

$$\text{اذن : } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\text{مثال 3: حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: } z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

$$\text{لدينا: } |z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(\pi - x) = -\cos x$ و $\sin(\pi - x) = \sin x$

$$\text{اذن : } z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

مثال 4: حدد شكلا مثلثيا للعدد العقدي: $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$

$$\text{لدينا: } |z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(\pi + x) = -\cos x$ و $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$$\text{اذن : } z_4 = 2 \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = 2 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right)$$

خاصية: ليكن z عددا عقديا غير منعدم

إذا كان $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ و $r > 0$, فإن: $|z| = r$ و

$$\arg z \equiv \theta [2\pi]$$

تمرين 9: حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد العقدية التالية:

$$z_2 = -2 + 2i, z_1 = \sqrt{3} + 3i$$

$$z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. العمليات و عمدة عدد عقدي

خاصية: ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين, لدينا:

$$\arg(z \times z') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$$

$$\arg \left(\frac{1}{z} \right) \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg \left(\frac{z}{z'} \right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg z [2\pi] \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{Z}$$

نتائج: ليكن z و z' عددين عقديين غير منعدمين, بحيث:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ و } z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \text{ مع } r > 0 \text{ و } r' > 0$$

$$-z = r(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$z \times z' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta' - \theta) + i \sin(\theta' - \theta))$$

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{Z}$$

تمرين 110: العلاقة بين الشكل الجبري و شكل مثلثي لعدد عقدي

نعتبر العددين العقديين. $z_1 = \sqrt{3} - i$ و $z_2 = 1 - i$ و $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

1. أعط شكلا مثلثيا لكل من z_1 و z_2 و z_3 .

مثال: نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega(3; -2)$ ونسبته $k=4$

وليكن z لحق النقطة M و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M

بالتحاكي h ونعتبر النقطة A التي لحقها $z_A = 3 + 5i$

1. بين أن: $z' = 4z - 9 + 6i$ وتسمى الكتابة العقدية للتحاكي

2. حدد لحق النقطة A' صورة النقطة A بالتحاكي h

الجواب: (1) $h_{(\Omega; k)}(M) = M'$ $\Leftrightarrow \overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M}$

$$Z_{M'} - Z_{\Omega} = k(Z_M - Z_{\Omega}) \Leftrightarrow$$

$$Z_{M'} = kZ_M + Z_{\Omega}(1 - k) \Leftrightarrow$$

$$z' = 4z + z_{\Omega}(1 - 4) \Leftrightarrow z' = 4z - 9 + 6i \Leftrightarrow$$

$$z' = 4z - 9 + 6i \Leftrightarrow z' = 4z - 3(3 - 2i) \Leftrightarrow$$

3- الكتابة العقدية للدوران r الذي مركزه Ω وزاويته α

$$Z_{M'} = e^{i\alpha}(Z_M - Z_{\Omega}) + Z_{\Omega} \Leftrightarrow r(Z_M) = Z_{M'}$$

وتسمى الكتابة العقدية للدوران r الذي مركزه Ω وزاويته α

مثال: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O; \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقطتين A و B التي لحقهما على التوالي

هي: $z_A = 7 + 2i$; $z_B = 4 + 8i$ وليكن z لحق النقطة M و z' لحق

النقطة M' صورة النقطة M بالدوران r الذي مركزه B

وزاويته $\frac{\pi}{2}$

1. بين أن: $z' = iz + 4i + 12$ وتسمى الكتابة العقدية للدوران r

2. بين أن لحق النقطة C صورة النقطة A بالدوران r هو

$$z_C = 10 + 11i$$

الجواب: (1) $r(M) = M'$ $\Leftrightarrow Z_{M'} = e^{i\alpha}(Z_M - Z_B) + Z_B$

$$\Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - 4 - 8i) + 4 + 8i \Leftrightarrow$$

$$z' = i(z - 4 - 8i) + 4 + 8i \Leftrightarrow z' = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z - 4 - 8i) + z$$

$$z' = iz + 4i + 12 \Leftrightarrow z' = iz - 4i + 8 + 4 + 8i \Leftrightarrow$$

(2) نعوض ب $z_A = 7 + 2i$ فنجد: $z' = i(7 + 2i) + 4i + 12$

$$z' = 7i - 2 + 4i + 12 = 11i + 10$$

ومنه لحق النقطة C هو $z_C = 11i + 10$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ أو } \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

تمرين 11: زاوية متجهتين

نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي:

$$z_A = 3 + 5i \text{ و } z_B = 3 - 5i \text{ و } z_C = 7 + 3i$$

$$(1) \text{ بين أن: } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$$

(2) استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية و أن $BC = 2AC$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4 - 8i}{-4 + 2i} = \frac{2i(-4 + 2i)}{-4 + 2i} = 2i \text{ (الجواب: 1)}$$

$$(2) [2\pi] \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) \equiv \arg(\overline{CA; CB})$$

$$\arg(\overline{CA; CB}) \equiv \arg(2i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

اذن المثلث ABC قائم الزاوية في C

$$\text{وجدنا أن: } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i \text{ اذن: } \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = |2i|$$

$$\text{اذن: } \frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2 \text{ اذن: } \frac{BC}{AC} = 2 \text{ اذن: } BC = 2AC$$

IX. تطبيقات: التعبير عقديا عن الإزاحة و التحاكي و الدوران

1- الكتابة العقدية للإزاحة T التي متجهتها \vec{u}

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \overline{MM'} = \vec{u}$$

$$Z_{M'} - Z_M = Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow$$

$$Z_{M'} = Z_M + Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow$$

$Z_{M'} = Z_M + Z_{\vec{u}}$ تسمى الكتابة العقدية للإزاحة

مثال: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ونعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي

$z_A = 3 + 5i$; $z_B = 3 - 5i$; $z_C = 7 + 3i$ وليكن z لحق النقطة M

و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالإزاحة T ذات المتجهة

$$\vec{u} \text{ التي لحقها } z - 2i$$

1. بين أن: $z' = z + 4 - 2i$ وتسمى الكتابة العقدية للإزاحة

2. تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالإزاحة T

3. حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B بالإزاحة T

الجواب: (1) $T(M) = M'$ $\Leftrightarrow \overline{MM'} = \vec{u}$

$$Z_{M'} - Z_M = Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow Z_{M'} = Z_M + Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow$$

$$z' = z + 4 - 2i \Leftrightarrow z' = z + Z_{\vec{u}} \Leftrightarrow$$

(2) نعوض ب $z_A = 3 + 5i$ فنجد: $z' = 3 + 5i + 4 - 2i$

$z' = 7 + 3i = z_C$ ومنه $z' = z_C$ هي صورة النقطة A بالإزاحة

T

(3) نعوض ب $z_B = 3 - 5i$ فنجد: $z' = 3 - 5i + 4 - 2i$

$z' = 7 - 7i = z_{B'}$ ومنه لحق النقطة B' هو $z_{B'} = 7 - 7i$

2- الكتابة العقدية للتحاكي h الذي مركزه Ω ونسبته k

$$h_{(\Omega; k)}(M) = M' \Leftrightarrow \overline{\Omega M'} = k \overline{\Omega M}$$

$$Z_{M'} - Z_{\Omega} = k(Z_M - Z_{\Omega}) \Leftrightarrow$$

$$Z_{M'} = kZ_M + Z_{\Omega}(1 - k) \Leftrightarrow$$

$Z_{M'} = kZ_M + Z_{\Omega}(1 - k)$ تسمى الكتابة العقدية للتحاكي