ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الجذع مشترك آداب

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس الدوال

I. مفهوم دالة عددية

تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$.

نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$), كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$, يرمز له بالرمز $f(x)$.

مثال1 : ليكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\to f(x)=3x^2-1$

1. أحسب : $f(1)$ و $f(-1)$ و $f(\sqrt{2})$
2. حدد سوابق العدد 2

الجواب: 1) $f(1)=3\times1^2-1=3-1=2$ و $f(1)=3\times(-1)^2-1=3-1=2$

$f(\sqrt{2})=3\times(\sqrt{2})^2-1=6-1=4$

2) $f(x)=3\times x^2-1=2$ يعني $3\times x^2-1=2$ يعني $3\times x^2=3$ يعني $x^2=1$ يعني $x=1$ أو $x=-1$ ومنه للعدد سابقين هما $x=1$ أو $x=-1$

II. مجموعة تعريف دوال عددية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x.

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x\in D_f$ تكافئ $f(x)\in\mathbb{R}$.

ملحوظة: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزء من D_f.

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب:

$f:D\to\mathbb{R}$

$x\to f(x)$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .
- ليكن x عنصرا من D, بحيث: $y=f(x)$
  - ← y يسمى صورة x بالدالة f .
  - ← العنصر x يسمى سابق العنصر y.
- الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

ملاحظة: 1) اذا كانت f دالة حدودية فان $D_f=\mathbb{R}$

2) اذا كانت f دالة معرفة على الشكل: $f(x)=\sqrt{P(x)}$

فان $D_f=\{x\in\mathbb{R}/P(x)\ge0\}$

3) اذا كانت f دالة معرفة على الشكل : $f(x)=\dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$

فان $D_f=\{x\in\mathbb{R}/Q(x)>0\}$

مثال: حدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f(x)=3x^2-x+1$ 2) $g(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$

الجواب: 1) $f(x)=3x^2-x+1$

يعني $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $g(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$ يعني $D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\ne0\}$

$2x-4=0$ يعني $2x=4$ يعني $x=2$

ومنه $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

III. التمثيل المبياني لدالة عددية:

تعريف: لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوى بحيث: $y=f(x)$ و $x\in D$

IV. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

1. الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f .
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=f(x)$

2. الدالة الفردية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها

نقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f .
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=-f(x)$

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي: $f(x)=\dfrac{2}{x}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) بين أن f دالة فردية 3) أرسم التمثيل المبياني للدالة f

4) اعط تأويلا مبيانيا

أجوبة : 1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\ne0\}$

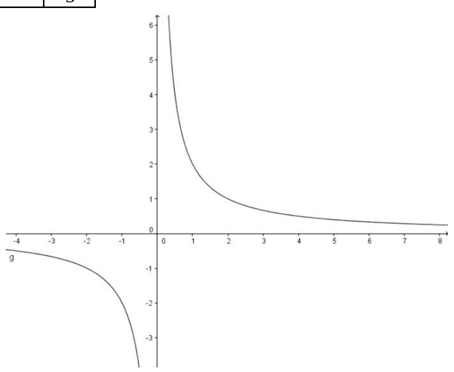
ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2) أ) لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x$ تنتمي إلى $\mathbb{R}^*$.

ب) $f(-x)=\dfrac{2}{(-x)}=-\dfrac{2}{x}=-f(x)$

ومنه f دالة فردية 3)

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$



4) نقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

أ) **التأويل المبياني**

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

❖ تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.

❖ تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

V. تغيرات دالة عددية:

1. **تعريف:** لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I .

❖ نقول إن الدالة f تزايدية (تناقصية) على المجال I , إذا و فقط إذا كان لكل

إذا كان $x_1 \prec x_2$ فان $f(x_1)\prec f(x_2)$ $\left(f(x_1)\succ f(x_2)\right)$

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I , إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1)=f(x_2)$

اعط مثال لدالة ثابتة

2. **جدول تغيرات دالة:** لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها. دراسة منحى تغيرات الدالة f , يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعا أو ثابتة. و نلخص نتائج هده الدراسة في جدول, يسمى جدول تغيرات الدالة ثابتة.

3. **رتابة دالة على مجال:**

تعريف: لتكن دالة عددية معرفة على مجال I.

نقول إن f رتيبة قطعا على المجال I إذا كانت تزايدية قطعا على I أو تناقصية قطعا على I.

VI. دراسة بعض الدوال الاعتيادية

1. **الدالة:** $x \mapsto ax+b$ $(a\neq 0)$

التمثيل المبياني للدالة f هو مستقيم

2. **الدالة:** $x\mapsto ax^2$ $(a\neq 0)$

ملخص :

الحالة: $a\succ 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

الحالة: $a\prec 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↗	

ملاحظات: المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto ax^2$ $(a\neq 0)$ يسمى شلجما.

النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلجم. محور الأراتيب هو محور تماثل للمنحنى.

4. **الدالة:** $f(x)=\frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$

ملخص

الحالة: $a\succ 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

الحالة: $a\prec 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

التمثيل المبياني للدالة f: بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل f على $]0,+\infty[$ ثم نتمم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل المركزي

الذي مركزه O أصل المعلم.

تعريف: منحنى الدالة $x\mapsto \frac{a}{x}$ $(a\neq 0)$ يسمى هذلولا مركزه O أصل المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x=0$ و $y=0$.

5. التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x\mapsto ax^2+bx+c$

مثال: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+4x+3$.

1) بين أن: $f(x)=(x+2)^2-1$

2) حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع محوري المعلم

3) املأ الجدول التالي

-5	-4	-3	-2	-1	0	1

4) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D)

5) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D)

أجوبة: $f(x)=x^2+4x+3$.

$D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

1) $f(x)=x^2+4x+3=x^2+2\times x\times 2+2^2-2^2+3$

$f(x)=(x+2)^2-4+3=(x+2)^2-1$

2) أ) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $(x+2)^2-1=0$

يعني $(x+2)^2=1$ يعني يعني $x+2=1$ أو $x+2=-1$

يعني $x=-1$ أو $x=-3$

ومنه نقط التقاطع هما: $B(-1;0)$ و $A(-3;0)$

ملاحظة: يمكن حل المعادلة باستعمال المميز

ب) نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=3$

ومنه نقطة التقاطع هي: $C(0;3)$

4) رسم: C_f

-5	-4	-3	-2	-1	0	1
8	3	0	-1	0	3	8