مذكرة رقم8 في درس الدوران

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ تعريف الدوران؛ الدوران العكسي لدوران ـ الحفاظ على المسافة وعلى قياس زاوية موجهة وعلى المرجح. ـ صورة مستقيم وقطعة ودائرة بدوران.	ـ إنشاء صور أشكال اعتيادية بدوران معلوم؛ ـ التعرف على تقايس الأشكال باستعمال الدوران؛ ـ استعمال دوران معلوم في وضعية هندسية بسيطة.	ـ يعرف الدوران انطلاقا من مركزه وزاويته ـ يعتبر إدخال الإحداثيات والصيغة التحليلية للدوران وتركيب دورانين خارج المقرر.

I. الدوران و الدوران العكسي

لتكن Ω نقطة من المستوى الموجه و $\alpha=\frac{\pi}{3}=60°$ ولتكن A و B نقطتين من المستوى الموجه

أرسم النقطة A' بحيث : $\begin{cases}\Omega A=\Omega A'\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega A'}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$ نقول A' هي صورة A بالدوران r الذي مركزه Ω زاويته α

بنفس الطريقة نرسم B' صورة B بالدوران r الذي مركزه Ω زاويته α

1)تعريف الدوران

لتكن Ω نقطة من المستوى الموجه و α عددا حقيقيا

الدوران الذي مركزه Ω زاويته α هو التحويل في المستوى الذي يربط كل نقطة M من المستوى بالنقطة M' المعرفة كالتالي

نرمز للدوران الذي مركزه Ω زاويته α بالرمز $r(\Omega;\alpha)$ أو r إذا لم يكن هناك التباس

$r(M)=M'$ تقرأ : M' هي صورة M بالدوران r

- إذا كان $M=\Omega$ فان $M'=\Omega$
- إذا كان $M\neq\Omega$ فان $\begin{cases}\Omega M=\Omega M'\\ \left(\overline{\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{\Omega M'}}\right)\equiv\alpha[2\pi]\end{cases}$

2)الدوران العكسي لدوران

تعريف : لتكن Ω نقطة من المستوى الموجه و α عددا حقيقيا

الدوران $r(\Omega;-\alpha)$ الذي مركزه Ω زاويته $-\alpha$ يسمى الدوران العكسي للدوران $r(\Omega;\alpha)$ الذي مركزه Ω زاويته α

- الدوران العكسي لدوران r يرمز له بالرمز r^{-1}
- لكل نقطة M من المستوى لدينا :

$r^{-1}(M')=M \Leftrightarrow r(M)=M'$

II.خاصيات:

خاصية1 : الحفاظ على المسافة: إذا كانت A و B نقطتين من المستوى و A' و B' صورتي A و B على التوالي بدوران فان : $AB=A'B'$

نقول الدوران يحافظ على المسافة

خاصية2 : ليكن r دورانا زاويته α. إذا كانت A' و B' صورتي نقطتين مختلفتين A و B على التوالي بالدوران r

فان : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}\right)\equiv\alpha[2\pi]$

ملحوظة: تمكننا هذه الخاصية من تحديد زاوية دوران انطلاقا من نقطتين مختلفتين وصورتيهما

تمرين1: ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A بحيث : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

وليكن O منتصف القطعة $[BC]$

1.أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

2.أنشئ صورة المثلث ABC بالدوران r' الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

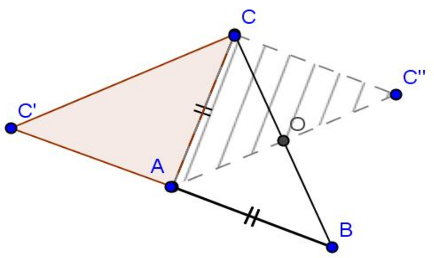
أجوبة :1) $r(A)=A$ لأن A مركز الدوران r :

و $r(B)=C$ لأن : $\begin{cases}AB=AC\\ \left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

و $r(B)=C'$ ومنه صورة المثلث ABC بالدوران r هو المثلث : ACC'

1) $r'(A)=C$ و $r'(B)=A$ و $r'(C)=C''$

ومنه صورة المثلث ABC بالدوران r هو المثلث : ACC''



تمرين2: ABC مثلثا ننشئ خارجه مثلثين ABD و ACE متساويي الساقين وقائمي الزاوية في A

1. بين أن : $BE=CD$
2. بين أن : $(BE)\perp(CD)$

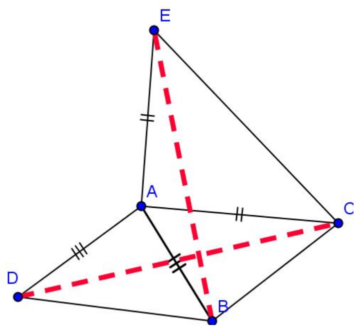
الجواب:

نعتبر الدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

لدينا : $\begin{cases}AD=AB\\ \left(\overline{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$

ومنه : $r(D)=B$ ❶

ولدينا : $\begin{cases}AC=AE\\ \left(\overline{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ ومنه : $r(C)=E$ ❷



من ❶و❷ وبما أن الدوران يحافظ على المسافة فان : $BE=CD$

2) لدينا : $r(D)=B$ ❶ و $r(C)=E$ ❷اذن :

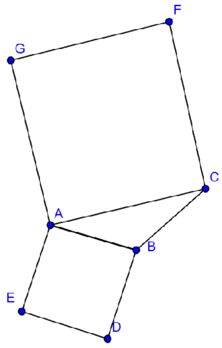
$\left(\overline{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أن : $(BE)\perp(CD)$

خاصية3 : الحفاظ على قياس زاوية موجهة

لتكن A و B و C و D نقط من المستوى بحيث $A \neq B$ و $C \neq D$
و A' و B' و C' و D' صورها على التوالي بدوران لدينا :
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{C'D'})[2\pi]$

نقول الدوران يحافظ على قياس الزوايا

تمرين3: ABC مثلث بحيث القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ موجب .
ننشئ خارج المثلث ABC المربعين $ABDE$ و $ACFG$
نعتبر الدوران r الذي مركزه A و زاوية $\frac{\pi}{2}$
1)حدد $r(E)$ و $r(C)$ 2)بين أن : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})[2\pi]$



1) لدينا : $\begin{cases} AE = AB \\ (\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❶ $r(E) = B$

لدينا : $\begin{cases} AC = AG \\ (\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❷ $r(C) = G$

ولدينا: $r(A) = A$ ❸ لأن A مركز الدوران r :

2) من ❶و❷ و ❸ وبما أن الدوران يحافظ على قياس الزوايا فان : $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}) \equiv (\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})[2\pi]$

خاصية4 : الحفاظ على المرجح

ليكن G مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$
إذا كانت A' و B' و G' صور A و B و G على التوالي بدوران r
فان : G' هي مرجح النقطتين المتزنتين $(A';\alpha)$ و $(B';\beta)$

ملحوظة: يمكننا تعميم هذه الخاصية على مرجح ثلاث أو أربع نقط.

استنتاج : الحفاظ على المنتصف

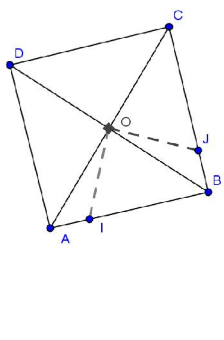
ليكن I منتصف القطعة $[AB]$
إذا كانت A' و B' و I' صور A و B و I على التوالي بدوران
فان: I' هي منتصف القطعة $[A'B']$

خاصية5 : الحفاظ على معامل استقامية متجهتين

لتكن A' و B' و C' صور A و B و C على التوالي بدوران
إذا كان : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ بحيث k عدد حقيقي فان : $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$

تمرين4: $ABCD$ مربع مركزه O بحيث : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
و I و J نقطتان من المستوى بحيث : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
وليكن r الدوران الذي مركزه O و زاوية $\frac{\pi}{2}$
بين أن : $OI = OJ$ و أن : $(OI) \perp (OJ)$

الجواب :
يكفي أن نبين أن : $r(I) = J$ ؟؟؟؟
نضع : $r(I) = I'$



لدينا : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : $r(A) = B$

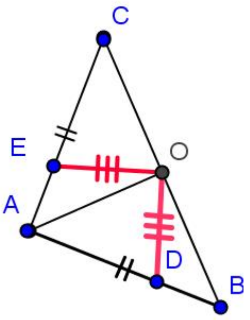
ولدينا : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ اذن: $\overrightarrow{BI'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ لأن الدوران : الحفاظ على معامل استقامية متجهتين

ونعلم أن : $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن : $\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{BJ}$ أي $I' = J$ أي $r(I) = J$

وبالتالي : $\begin{cases} OI = OJ \\ (\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

تمرين5: ABC مثلث قائم الزاوية A ومتساوي الساقين فبحيث : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ و O منتصف القطعة $[BC]$
وليكن D بحيث : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ وليكن E بحيث : $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$
باعتبار الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ بين أن المثلث ODE قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O



الجواب : يكفي أن نبين أن : $r(E) = D$ ؟؟؟؟
نضع: $r(E) = E'$

لدينا : $\begin{cases} OA = OC \\ (\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❶ $r(C) = A$

ولدينا : $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ ومنه : ❷ $r(A) = B$

ولدينا : $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸اذن من ❶و❷ و ❸ :نجد أن $\overrightarrow{AE'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹لأن الدوران : يحافظ على معامل استقامية متجهتين

ونعلم أن : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

من ❹و❺ نستنتج أن : $\overrightarrow{AE'} = \overrightarrow{AD}$ أي $E' = D$ أي $r(E) = D$

وبالتالي : $\begin{cases} OE = OD \\ (\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ يعني ان : أن المثلث ODE قائم الزاوية ومتساوي الساقين في O

III.صور بعض الأشكال بدوران:

ليكن r دورانا و A و B و O و A' و B' و O' نقطا من المستوى بحيث : $r(A) = A'$ و $r(B) = B'$ و $r(O) = O'$

خاصية :

- صورة المستقيم (AB) بالدوران r هي المستقيم $(A'B')$
- صورة القطعة $[AB]$ بالدوران r هي المستقيم $[A'B']$
- صورة الدائرة $C(O;R)$ التي مركزها O وشعاعها R بالدوران r هي الدائرة $C'(O';R)$ التي مركزها O' وشعاعها R

استنتاج

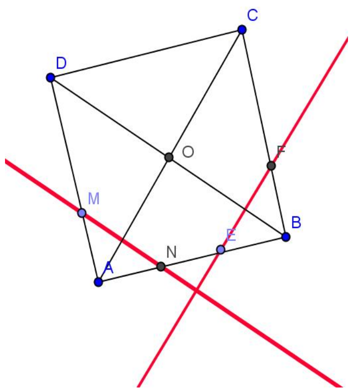
- صورة نصف المستقيم $[AB)$ بالدوران r هي نصف المستقيم $[A'B')$
- صورة مستقيمين متعامدين بالدوران r هما مستقيمان متعامدان
- صورة مستقيمين متوازيين بالدوران r هما مستقيمان متوازيان
- إذا كانت نقطة M تنتمي إلى تقاطع مستقيمين (D) و (Δ) فان صورة M بالدوران r هي نقطة تقاطع صورتي المستقيمين (D) و (Δ) بالدوران r .

تمرين6: $ABCD$ مربع مركزه O بحيث : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ و (D) مستقيم يوازي المستقيم (BD) و يقطع (AD) في M و (AB) في N

وليكن r الدوران الذي مركزه O و زاوية $\frac{\pi}{2}$

نعتبر النقطتين E و F صورتي النقطتين M و N بالدوران r على ا لتوالي.

1. أرسم الشكل و بين أن : $(EF)\perp(MN)$
2. حدد صورة المستقيم (BD) بالدوران r
3. أ)بين أن : $DN=FA$ ب)بين أن : $(EF)\,||\,(AC)$



الأجوبة : 1)لدينا :

❶ $r(M)=E$ و

❷ $r(N)=F$

من ❶و❷ نستنتج أن :

$\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ أي أن :

$(EF)\perp(MN)$

2) صورة المستقيم (BD) بالدوران r ؟؟؟

لدينا : $\begin{cases}0B=0C\\ \left(\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ اذن :

❶ $r(B)=C$

ولدينا : $\begin{cases}0D=0A\\ \left(\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$ اذن : $r(D)=A$ ❷

من ❶و❷ نستنتج أن: $r((BD))=(AC)$

3) أ) $DN=FA$ ؟؟؟

ولدينا : $r(D)=A$ ❶ و $r(N)=F$ ❷

اذن : $DN=FA$ لأن : الدوران يحافظ على المسافة

ب)نبين أن : $(EF)\,||\,(AC)$:

لدينا : $(MN)\,||\,(BD)$حسب المعطيات و لدينا :

و $r((BD))=(AC)$ و $r((MN))=(EF)$

وبما أن : الدوران يحافظ على التوازي فان : $(EF)\,||\,(AC)$

تمارين للبحث

تمرين1: $ABCD$ مربع بحيث : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

1. حدد زاوية الدوران r الذي مركزه A و $r(D)=B$
2. حدد زاوية الدوران r' الذي مركزه C و $r'(D)=B$

تمرين2: ABC مثلث متساوي الأضلاع بحيث :

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$$

1.حدد زاوية الدوران r_1 الذي مركزه B و يحول A إلى C

2.حدد مركز و زاوية الدوران r_2 الذي يحول A إلى B و B إلى C.

تمرين3: $ADEF$ مربع بحيث : $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ننشئ خارجه المثلث CED متساوي الأضلاع و داخله المثلث BEF متساوي الأضلاع

1. نعتبر الدوران r الذي مركزه E و زاوية $\frac{\pi}{3}$

بين أن : $r(F)=B$ و $r(D)=C$

2. لتكن A_1 النقطة بحيث : $r(A_1)=A$

a) بين أن المثلث AEA_1 متساوي الأضلاع

b) بين أن النقط : A_1 و D و F مستقيمية

c) استنتج أن النقط : A و B و C مستقيمية