أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مادة الرياضيات	الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم/8

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية

- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

مذكرة رقم 8 في درس الدوال الأسية

محتوى البرنامج

- **الدالة الأسية النبيرية**
  - **تعريف وخصائص جبرية**
  - **نهايات اعتيادية**
  - **مشتقة الدالة الأسية النبيرية**
  - **الدالة الأصلية للدالة الأسية النبيرية**
- **الدالة الأسية للأساس a.**
  - **تعريف وخصائص جبرية**
  - **دالة الأسية للأساس 10**
- **دراسة دوال تحتوي على الدالة الأسية النبيرية و اللوغاريتم النبيري**

القدرات المنتظرة

- التمكن من حل معادلات و متراجحات اسية نبيرية
- التمكن من نهايات الدوال الأسية النبيرية الأساسية و توظيفها
- التمكن من النهايات الأسية النبيرية الأساسية و توظيفها
- التمكن من دراسة و تمثيل دوال تحتوي على لوغاريتمات و دوال أسية نبيرية
- تحديد قيم مقربة للعدد $(a \in \mathbb{R})e^{a}$ أو تحديد قيم مقربة للعدد a بحيث e^{a} معلوم باستعمال الأداة المعلوماتية

I. الدالة الأسية النبيرية

الدالة $\ln$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ و $\ln(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$.

و منه الدالة $\ln$ تقبل دالة عكسية معرفة على $\mathbb{R}$.

1)تعريف: الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية و نرمز لها بالرمز $\exp$.

ملاحظة : الكتابة : $\exp(x)$ نكتبها باختصار على الشكل : e^{x}

2)نتائج: $e^{0}=1$ و $e^{1}=e$. $(\forall x \in \mathbb{R})e^{x}>0$.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0;+\infty[) \ , \ (y=e^{x} \Leftrightarrow x=\ln y)$$

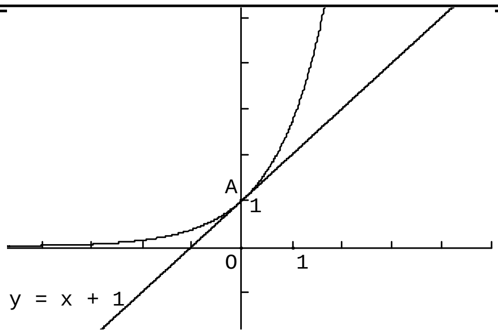
$(\forall x \in \mathbb{R});\ln(e^{x})=x$ و $(\forall x \in]0;+\infty[);e^{\ln x}=x$.

الدالة $\exp$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

$$e^{x}>e^{y} \Leftrightarrow x>y$$

$e^{x}=e^{y} \Leftrightarrow x=y$ لكل x و y من $\mathbb{R}$

منحنى الدالة $\exp$: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة $\exp$ هو مماثل لمنحنى الدالة $\ln$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : . $y=x$.



3)خاصيات:

لكل x و y من $\mathbb{R}$ و لكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا:

- $e^{x+y}=e^{x}\times e^{y}$; $e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$
- $e^{x-y}=\dfrac{e^{x}}{e^{y}}$ و $(\forall x \in]0;+\infty[)\ (e^{x})'=e^{x}$

تمرين1: ليكن a عددا حقيقيا, و b عددا من $\mathbb{R}^{*+}$ بسط ما يلي :

$$A=e^{\ln(b)}-\ln(2e^{b})-\ln\left(\frac{e}{2}\right) \quad \text{و} \quad B=\frac{(e^{a})^{5}\times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^{2}}$$

نضع: $f(x)=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}$ أحسب $f(2\ln 3)$

أجوبة :

$$A=e^{\ln(b)}-\ln(2e^b)-\ln\left(\frac{e}{2}\right)=b-\ln2-\ln(e^b)-\ln e+\ln2$$

$$A=b-\ln2-b-1+\ln2=-1$$

$$B=\frac{(e^a)^5\times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^2}=\frac{e^{5a}\times e^{3-a}}{e^{2\left(1+\frac{3}{2}a\right)}}=\frac{e^{5a+3-a}}{e^{2+3a}}$$

$$B=\frac{e^{4a+3}}{e^{2+3a}}=e^{4a+3-2-3a}=e^{a+1}$$

$$f(2\ln3)=e^{2\ln3}-2e^{\frac{2\ln3}{2}}=e^{\ln3^2}-2e^{\ln3}=3^2-2\times3=3$$

تمرين2: بسط ما يلي: $A=e^{-x}\times e^{2x}$

$B=(e^{2-x})^2\times e^{3x-4}$, $C=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x}$

$E=e^{2x}\left((e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2\right)$, $D=\dfrac{e^{2x}\times e^{3x}}{(e^x)^4}$

أجوبة : $A=e^{-x}\times e^{2x}=e^{-x+2x}=e^x$

$$B=(e^{2-x})^2\times e^{3x-4}=e^{2(2-x)}\times e^{3x-4}=e^{4-2x+3x-4}=e^x$$

$$C=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x}=(e^{2x})^{\frac{1}{2}}\times e^{-x}=e^{2x\times\frac{1}{2}}\times e^{-x}=e^x\times e^{-x}=e^{x+(-x)}=e^0=1$$

$$D=\frac{e^{2x}\times e^{3x}}{(e^x)^4}=\frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}}=\frac{e^{5x}}{e^{4x}}=e^{5x-4x}=e^x$$

$$E=e^{2x}\left((e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2\right)$$

$$E=e^{2x}\left((e^x)^2+2e^x\times e^{-x}+(e^{-x})^2+(e^x)^2-2e^x\times e^{-x}+(e^{-x})^2\right)$$

$$E=e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2x}+e^{2x}+e^{-2x}\right)=e^{2x}\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right)$$

$$E=2e^{4x}+2$$

تمرين3: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

$$f(x)=e^{\frac{3x-1}{x^2-2x}} \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{3x-1}{(e^x)^2-1}$$

أجوبة : $f(x)=e^{\frac{3x-1}{x^2-2x}}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-2x\neq0\}$

$x^2-2x=0$ يعني $x(x-2)=0$ يعني $x=0$ أو $x-2=0$

يعني $x=0$ أو $x=2$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0,2\}$

$$g(x)=\frac{3x-1}{(e^x)^2-1}$$

$D_g=\{x\in\mathbb{R}/(e^x)^2-1\neq0\}$

$(e^x)^2-1=0$ يعني $(e^x)^2-1^2=0$

يعني $(e^x-1)(e^x+1)=0$ يعني $e^x+1=0$ او $e^x-1=0$

يعني $e^x=-1$ او $e^x=1$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\,e^x>0$ اذن المعادلة :

$e^x=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$e^x=1$ يعني $x=\ln1$ يعني $x=0$ ومنه : $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 2) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$ 3) $e^{2x}-5e^x+6=0$

أجوبة 1): $e^{1-x}\times e^{2x}=e \Leftrightarrow e^{2x+1-x}=e^1$

$\Leftrightarrow e^{x+1}=e^1 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$

ومنه : $S=\{0\}$

2) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1} \Leftrightarrow e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$\Leftrightarrow (2-x)-(1+2x)=x-1$

$\Leftrightarrow 2-x-1-2x=x-1 \Leftrightarrow -4x=-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

ومنه : $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $e^{2x}-5e^x+6=0 \Leftrightarrow (e^x)^2-5e^x+6=0$

نضع : $X=e^x$ والمعادلة تصبح : $X^2-5X+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=25-24=1>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\dfrac{5+1}{2\times1}$ و $X_2=\dfrac{5-1}{2\times1}$ يعني $X_1=3$ و $X_2=2$

يعني $e^{x_1}=3$ و $e^{x_2}=2$ يعني $x_1=\ln3$ و $x_2=\ln2$

ومنه : $S=\{\ln2,\ln3\}$

تمرين5: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{-3-x}\times e^{1+2x}>\dfrac{1}{e^x}$ 2) $\dfrac{1}{e^{x+1}}\geq e^{1-x^2}$

أجوبة (1: $e^{-3-x}\times e^{1+2x}>\dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^{-3-x+1+2x}>e^{-x}$

$\Leftrightarrow -3-x+1+2x>-x \Leftrightarrow 2x>2 \Leftrightarrow x>1$

ومنه : $S=]1,+\infty[$

2) $e^{-1-x}\geq e^{1-x^2} \Leftrightarrow -1-x\geq1-x^2 \Leftrightarrow x^2-x-2\geq0$

$\Delta=b^2-4ac=1+8=9>0$

اذن تقبل جذرين هما:

$x_1=\dfrac{1+3}{2\times1}$ و $x_2=\dfrac{1-3}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه : $S=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$

تمرين6: حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية:

1) $(S_1)\begin{cases}2e^x+3e^y=8\\ e^x+e^y=3\end{cases}$ 2) $(S_2)\begin{cases}e^xe^y=10\\ \dfrac{e^x}{e^y}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$

أجوبة 1 : $(S_1)\begin{cases}2e^x+3e^y=8\\ e^x+e^y=3\end{cases}$

$$\begin{cases}2e^x+3e^y=8\\ e^x+e^y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2e^x+3e^y=8\\ -2e^x-2e^y=-6\end{cases}$$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد :

$e^y=2$ يعني $2e^x+3e^y-2e^x-2e^y=8-6$

يعني $y=\ln 2$

وبعويض y بقيمتها في المعادلة 2 نجد : $e^x+e^{\ln 2}=3$

يعني $e^x+2=3$ يعني $e^x=1$ يعني $x=\ln 1=0$

ومنه : $S=\{(0,\ln 2)\}$

(2 $\left(S_2\right)\begin{cases} e^x e^y=10 \\ \dfrac{e^x}{e^y}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$ يعني $\begin{cases} e^{x+y}=10 \\ e^{x-y}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$

يعني $\begin{cases} x+y=\ln(10) \\ x-y=\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)\end{cases}$ يعني $\begin{cases} x+y=\ln(2\times 5) \\ x-y=\ln\left(\dfrac{2}{5}\right)\end{cases}$

يعني $\begin{cases} x+y=\ln 2+\ln 5 \\ x-y=\ln 2-\ln 5\end{cases}$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد: $2x=2\ln 2$

يعني $x=\ln 2$

وبعويض x بقيمتها في المعادلة 1 نجد :

$\ln 2+y=\ln 2+\ln 5$

يعني $y=\ln 5$ ومنه : $S=\{(\ln 2,\ln 5)\}$

II. نهايات اعتيادية

خاصية1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

أمثلة: لنحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x$ لدينا.

$(\forall x\in\mathbb{R});(2x-1)e^x=2\left(xe^x\right)-e^x$

و بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ فان

$\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x=0$

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{x}$ لدينا. $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\dfrac{e^x+3}{x}=\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{3}{x}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$ فان:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3}{x}=+\infty$.

خاصية2: لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$ و.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$

مثال: لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3x}{x^3}$ لدينا:

$(\forall x\in\mathbb{R}^*);\dfrac{e^x+3x}{x^3}=\dfrac{e^x}{x^3}+\dfrac{3}{x^2}$

بما أن. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ فان: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3x}{x^3}$

تمرين7: أحسب النهايات التالية :

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

(1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x+2}$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}$ (3 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+e^{-x}$ (5 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ (6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$

(7 $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-e^x$ (8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}$ (9 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+3x}$

(10 $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3-e^x$ (11 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3x}{x^3}$

(12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$ (ضع $2x=X$) (13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}$ (14

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3+x+1}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$

(15 $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x$ (16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x$ (17

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$ (18 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right)e^{2x}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

(19 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$ (20 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

(21 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{1-x}-1}{x-1}$ (22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ (23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+1}-e}{x}$

(استعمال المشتقة)

أجوبة : (1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x+2}=\dfrac{0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$ لأن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}-x+1=+\infty$ اذن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}=+\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}-x+1=-\infty$ اذن :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+e^{-x}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ اذن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+e^{-x}=+\infty$

(5 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ لدينا :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{x^3+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x^2}=0$

اذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} = e^0 = 1$

$$(6\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$$(7\quad \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{e^x}{x}\right)=-\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{e^x}{x}=-\infty$

$$(8\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{x^2}=0$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}=+\infty$

$$(9\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}\times\frac{1}{1+\frac{3}{x}}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{x}}=1$

اذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+3x}=+\infty$

$$(10\quad \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3-e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(3-\frac{e^x}{x^3}\right)$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$ اذن $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\frac{e^x}{x^3}=-\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$

اذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3-e^x=-\infty$

(11

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+3x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}+\frac{3x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}+\frac{3}{x^2}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$

(12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}$ (ضع $2x=X$)

نضع $2x=X$ يعني $x=\frac{X}{2}$

$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to+\infty$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{\left(\frac{X}{2}\right)^3}=\lim\limits_{X\to+\infty}8\frac{e^X}{X^3}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X^3}=+\infty$ اذن : $\lim\limits_{X\to+\infty}8\frac{e^X}{X^3}=+\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=+\infty$

(13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}$ نضع $3x=X$ يعني $x=\frac{X}{3}$

$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to+\infty$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{\frac{X}{3}}=\lim\limits_{X\to+\infty}3\frac{e^X}{X}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{e^X}{X}=+\infty$ اذن : $\lim\limits_{X\to+\infty}3\frac{e^X}{X}=+\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x}=+\infty$

(14

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

نعلم حسب سؤال سابق أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3}=+\infty$ ولدينا

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=1$$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x^3+x+1}=+\infty$

(15 $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}3xe^x-e^x$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ اذن :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x=0$

(16 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5e^x-4x^3e^x$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ اذن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x=0-0=0$

(17 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

نضع $\frac{1}{x}=X$ $\quad X\to-\infty \Leftrightarrow x\to0^-$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=0$

(18

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right)e^{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^{2x}-2xe^{2x}=0-2\times0=0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

(19 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$

نضع $2x=X$ يعني $x=\frac{X}{2}$ و $X\to0 \Leftrightarrow x\to0$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{X\to0}\frac{e^{X}-1}{3\frac{X}{2}}=\lim_{X\to0}\frac{2}{3}\frac{e^{X}-1}{X}=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$$

لأن : $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

(20 $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ نضع $X=\frac{1}{x}$ اذن : $x=\frac{1}{X}$

$X\to0\Leftrightarrow x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{X\to0}\frac{1}{X}\left(e^{X}-1\right)=\lim_{X\to0}\frac{e^{X}-1}{X}=1$$

(21 $\lim_{x\to1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$

نضع $X=1-x$ يعني $x=1-X$ و $x\to1\Leftrightarrow$ $X\to0$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}=\lim_{X\to0}\frac{e^{X}-1}{-X}=\lim_{X\to0}-\frac{e^{X}-1}{X}=-1$$

لأن : $\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

(22 $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}$

نضع $X=-x$ يعني $x=-X$ و $x\to0\Leftrightarrow X\to0$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{X\to0}\frac{e^{X}-1}{-X}=\lim_{X\to0}-\frac{e^{X}-1}{X}=-1$$ لأن :

$\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

(23 $\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$ (استعمال المشتقة)

نضع : $f(x)=e^{x+1}$ اذن : $f(0)=e^{0+1}=e^{1}=e$

و $f'(x)=(x+1)'e^{x+1}=1e^{x+1}=e^{x+1}$ اذن : $f'(0)=e$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e$$

III. مشتقة الدالة. $x\mapsto e^{x}$

خاصية: الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$(\forall x\in\mathbb{R})\left(e^{x}\right)'=e^{x}$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فان الدالة: $f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا: .$(\forall x\in I);\ f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

و نكتب اصطلاحا: $(\forall x\in I);\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$

و للبرهان يكفي ملاحظة أن : $f=\exp ou$

مثال: لنحسب مشتقة الدالة. $f:x\mapsto e^{x^{2}-x}$

لدينا الدالة $u:x\mapsto x^{2}-x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\left(x^{2}-x\right)'e^{x^{2}-x}$

$(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=(2x-1)e^{x^{2}-x}$

تمرين8: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية: (1 $f(x)=e^{3x}+e^{x}$

(2 $f(x)=2x-e^{-x}$ (3 $f(x)=x^{2}e^{-x}$ (4 $f(x)=(2x-1)\left(e^{x}-1\right)$

(5 $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$ (6 $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^{x}}$ (7 $f(x)=e^{x\ln x}$

(8 $f(x)=\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}$ (9 $f(x)=\frac{2}{(x-1)^{2}}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

أجوبة :1) $f(x)=e^{3x}+e^{x}$ اذن: $f'(x)=\left(e^{3x}+e^{x}\right)'$

$$f'(x)=\left(e^{3x}\right)'+\left(e^{x}\right)'=(3x)'e^{3x}+e^{x}=3e^{3x}+e^{x}$$

(2 $f(x)=2x-e^{-x}$

$$f'(x)=\left(2x-e^{-x}\right)'=(2x)'-\left(e^{-x}\right)'=2-(-x)'e^{-x}=2+e^{-x}$$

(3 $f(x)=x^{2}e^{-x}$

$$f'(x)=\left(x^{2}e^{-x}\right)'=\left(x^{2}\right)'e^{-x}+x^{2}\left(e^{-x}\right)'=2xe^{-x}+x^{2}\times(-x)'e^{-x}$$

$$f'(x)=e^{-x}\left(2x-x^{2}\right)$$

(4 $f(x)=(2x-1)\left(e^{x}-1\right)$

$$f'(x)=\left((2x-1)\left(e^{x}-1\right)\right)'=(2x-1)'\left(e^{x}-1\right)+(2x-1)\left(e^{x}-1\right)'$$

$$f'(x)=2\left(e^{x}-1\right)+(2x-1)e^{x}=2e^{x}-2+2xe^{x}-e^{x}=e^{x}-2+2xe^{x}$$

(5 $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$

$$f'(x)=\left((x-1)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=((x-1))'e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f'(x)=1e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\frac{1}{x^{2}}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+(x-1)\frac{1}{x^{2}}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^{2}+x-1}{x^{2}}\right)$$

(6 $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^{x}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{e^{2x}-e^{x}}\right)'=\frac{\left(e^{2x}-e^{x}\right)'}{2\sqrt{e^{2x}-e^{x}}}=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{2\sqrt{e^{2x}-e^{x}}}$$

(7 $f(x)=e^{x\ln x}$

$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=(x\ln x)'e^{x\ln x}=\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)e^{x\ln x}$$

$$f'(x)=\left(1\ln x+x\frac{1}{x}\right)e^{x\ln x}=(\ln x+1)e^{x\ln x}$$

(8 $f(x)=\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}$

$$f'(x)=\left(\left(e^{x}-4\right)\sqrt{e^{x}-1}\right)'=\left(\left(e^{x}-4\right)\right)'\sqrt{e^{x}-1}+\left(e^{x}-4\right)\left(\sqrt{e^{x}-1}\right)'$$

$$f'(x)=e^{x}\sqrt{e^{x}-1}+\left(e^{x}-4\right)\frac{\left(e^{x}-1\right)'}{2\sqrt{e^{x}-1}}=e^{x}\sqrt{e^{x}-1}+\left(e^{x}-4\right)\frac{e^{x}}{2\sqrt{e^{x}-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x\left(e^x-1\right)+e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f\left(x\right)=\frac{2}{\left(x-1\right)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (9$$

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{2}{\left(x-1\right)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)'=\left(\frac{2}{\left(x-1\right)^2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{\left(x-1\right)^2}\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)'$$

$$f'\left(x\right)=\left(2\left(x-1\right)^{-2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{\left(x-1\right)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'\left(x\right)=-4\left(x-1\right)^{-3}\left(\left(x-1\right)\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{\left(x-1\right)^2}\times\frac{-2}{\left(x-1\right)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'\left(x\right)=e^{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{-4}{\left(x-1\right)^3}-\frac{4}{\left(x-1\right)^4}\right)=\frac{-4x}{\left(x-1\right)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

IV. الدوال الأصلية للدالة: $x\mapsto u'\left(x\right)e^{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto u'\left(x\right)e^{u(x)}$ على I

هي الدوال المعرفة على I بما يلي: $x\mapsto e^{u(x)}+k$ حيث k عدد حقيقي

مثال: الدالة: $x\mapsto e^{\sin x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \cos x e^{\sin x}$ على $\mathbb{R}$

تمرين9: حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I

1. $I=\mathbb{R};\ f\left(x\right)=2e^{3x}-e^{-x}$
2. $I=\left]0;+\infty\right[;\ f\left(x\right)=\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$
3. $I=\mathbb{R};\ f\left(x\right)=e^x\left(e^x-1\right)^3$
4. $I=\left[0;\pi\right];\ f\left(x\right)=\sin xe^{\cos x}$
5. $I=\left]0;+\infty\right[\ f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

أجوبة: 1) $I=\mathbb{R};\ f\left(x\right)=2e^{3x}-e^{-x}$

$$f\left(x\right)=2e^{3x}-e^{-x}=\frac{2}{3}\left(3x\right)'e^{3x}+\left(-x\right)'e^{-x}$$

إذن: $F\left(x\right)=\frac{2}{3}e^{3x}+e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

2) $I=\left]0;+\infty\right[;\ f\left(x\right)=\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

$$f\left(x\right)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

إذن: $F\left(x\right)=-\frac{1}{2}\frac{1}{e^{2x}-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

3) $I=\mathbb{R};\ f\left(x\right)=e^x\left(e^x-1\right)^3$

$$f\left(x\right)=e^x\left(e^x-1\right)^3=\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)^3$$

إذن: $F\left(x\right)=\frac{1}{3+1}\left(e^x-1\right)^{3+1}=\frac{1}{4}\left(e^x-1\right)^4$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

4) $I=\left[0;\pi\right];\ f\left(x\right)=\sin xe^{\cos x}$

$$f\left(x\right)=\sin xe^{\cos x}=-\left(\cos x\right)'e^{\cos x}$$

إذن: $F\left(x\right)=e^{\cos x}$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

5) $I=\left]0;+\infty\right[;\ f\left(x\right)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

$$f\left(x\right)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}$$

إذن: $F\left(x\right)=\ln\left|e^x-x\right|$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

تمرين10: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f\left(x\right)=e^{2x}-2e^x$$

1. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
2. حدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

أجوبة: 1) $f\left(x\right)=e^{2x}-2e^x$

$$D_f=\mathbb{R}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-2e^x=0$ لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(e^x-2\right)=+\infty$ لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$$f'\left(x\right)=\left(e^{2x}-2e^x\right)'=2e^{2x}-2e^x=2e^x\left(e^x-1\right)$$

اشارة $f'\left(x\right)$ هي اشارة e^x-1

$$x>0\Leftrightarrow x>\ln 1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$$

إذن: $x>0\Leftrightarrow e^x-1>0$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f\left(x\right)=e^{2x}-2e^x$

$$f\left(x\right)=e^{2x}-2e^x=\frac{1}{2}\left(2x\right)'e^{2x}-2\left(e^x\right)'$$

إذن: $F\left(x\right)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين11: أحسب $f'\left(x\right)$ في الحالات الأتية على المجال I

1. $f\left(x\right)=e^{x^2-3x}\ ,\ I=\mathbb{R}$
2. $f\left(x\right)=\left(x-1\right)e^{\frac{1}{x}};I=\left]0;+\infty\right[$
3. $f\left(x\right)=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1};I=\mathbb{R}$

أجوبة: 1) $f\left(x\right)=e^{x^2-3x}\ ,\ I=\mathbb{R}$

$$f'\left(x\right)=\left(e^{x^2-3x}\right)'=\left(x^2-3x\right)'e^{x^2-3x}=\left(2x-3\right)e^{x^2-3x}$$

2) $f\left(x\right)=\left(x-1\right)e^{\frac{1}{x}};I=\left]0;+\infty\right[$

$$f'(x)=\left(\left(x-1\right)e^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(x-1\right)'e^{\frac{1}{x}}+\left(x-1\right)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f'(x)=1e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}\left(x-1\right)e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}\left(x-1\right)\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

3) $f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1}; I=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\frac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x+1\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=1-\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=1-\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(e^x+1\right)^2-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^{2x}+1}{\left(e^x+1\right)^2}$$

V. الدالة الأسية للأساس a ($a>0$ و $a\neq 1$)

1)تعريف: ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد 1
الدالة الأسية للأساس a هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $e^{x\ln a}$, و الذي يكتب a^x
و نرمز لها بالرمز $\exp_a$, و لدينا:

$$(\forall x\in\mathbb{R})\exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$$

2)نتائج:

❖ لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $\ln\left(a^x\right)=x\ln a$

❖ $(\forall x\in\mathbb{R})$ و $\left(\forall y\in\left]0,+\infty\right[\right)$ $a^x=y$ يكافئ $x=\log_a y$

❖ لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $a^x=a^y$ يكافئ $x=y$

3)خاصيات: لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$a^xa^y=a^{x+y};\frac{1}{a^x}=a^{-x};\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y};\left(a^x\right)^y=a^{xy}$$

ملحوظة: هذه الخاصيات هي تمديد لخاصيات القوى الجذرية و يمكن البرهان عليها باستعمال المتساوية $a=e^{x\ln a}$

VI. الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto a^x$

1)خاصية: الدالة $f:x\mapsto a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=(\ln a)a^x$$

البرهان: لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=a^x=e^{x\ln a}$

نضع: $u(x)=x\ln a$ و منه: $f(x)=e^{u(x)}$

لدينا u دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (دالة خطية) إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
و لدينا:

$$(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\ln a\,e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$$

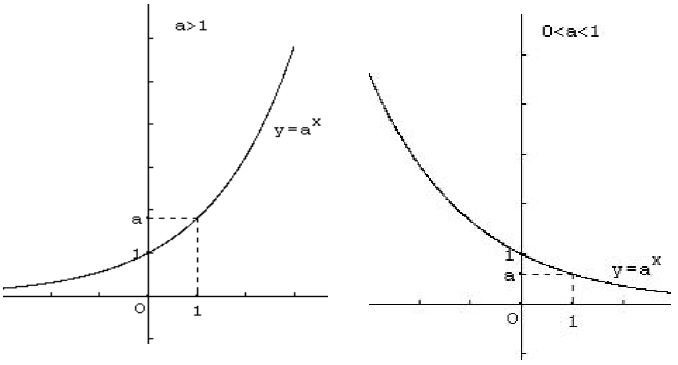
2)نتيجة:

❖ إذا كان $0<a<1$ فإن:

$$\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right);\left(a^x<a^y\Leftrightarrow x>y\right)$$

❖ إذا كان $a>1$ فإن:

$$\left(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\right);\left(a^x<a^y\Leftrightarrow x<y\right)$$



تمرين12: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات الآتية:

1) $2^{x+1}=8^x$ 2) $3^x=12$ 3) $5\times2^x+2^{2x+1}-336=0$

4) $2^{x-1}>4^x$ 5) $\left(0,5\right)^{2x}\geq\left(0,5\right)^{x+1}$

أجوبة: 1) $2^{x+1}=8^x$ يعني $2^{x+1}=\left(2^3\right)^x$ يعني $2^{x+1}=2^{3x}$

يعني $x+1=3x$ يعني $1=2x$ يعني $\frac{1}{2}=x$ ومنه: $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

2) $3^x=12$ يعني $x=\log_3 12$ ومنه: $S=\left\{\log_3 12\right\}$

3) $2^x-3\times2^{x+1}-16=0$ يعني $2^x-3\times2^1\times2^x-16=0$

نضع: $X=2^x$ و المعادلة تصبح: $X^2-6X-16=0$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(-6\right)^2+4\times1\times16=100>0$$

بما أن $\Delta>0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{6+10}{2\times1}=8$ و $X_2=\frac{6-10}{2\times1}=-2$ يعني $X_1=8$ و $X_2=-2$

$2^x=8$ و $2^x=-2$ يعني $x_1=\log_2 8$ و $2^x=-2$ ليس لها حل

$x_1=\log_2 8$ يعني $x_1=\log_2 2^3=3\log_2 2=3\times1=3$

ومنه: $S=\{3\}$

4) $2^{x-1}>4^x$ يعني $2^{x-1}>\left(2^2\right)^x$ يعني $2^{x-1}>2^{2x}$

يعني $x-1>2x$ يعني $-1>x$

ومنه: $S=\left]-\infty,-1\right[$

5) $\left(0,5\right)^{2x}>\left(0,5\right)^{x+1}$ يعني $2x<x+1$ لأن: $0<0,5<1$

يعني $x<1$ ومنه $S=\left]-\infty,1\right[$

3)حالة خاصة الدالة الأسية للأساس 10

❖ الدالة: $x\mapsto10^x$ تسمى الدالة الأسية للأساس 10 و نرمز لها بالرمز $\exp_{10}$

و اصطلاحا بالرمز 10^x و لدينا $10^x=e^{x\ln10}$

❖ $(\forall x\in\mathbb{R})\left(\forall x\in\left]0;+\infty\right[\right);10^x=y\Leftrightarrow x=\log y$

حيث $\log$ هي دالة اللوغاريتم العشري

مثال: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية: $100^x+40=14\times10^x$

الجواب: $100^x+40=14\times10^x$ يعني

$$\left(10^2\right)^x-14\times10^x+40=0$$

يعني $10^{2x}-14\times10^x+40=0$ يعني

$$\left(10^x\right)^2-14\times10^x+40=0$$

نضع: $X=10^x$ و المعادلة تصبح: $X^2-14X+40=0$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(-14\right)^2-4\times40=36>0$$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{14+6}{2\times1}$ و $X_2=\frac{14-6}{2\times1}$ يعني $X_1=10$ و $X_2=4$

يعني $10^{x_1}=10$ و $10^{x_2}=4$ يعني $x_1=1$ و $x_2=\log_{10}4$

ومنه : $S=\{1,\log_{10}4\}$

VII. دراسة دوال تحتوى على الدالة الأسية النبيرية و اللوغاريتم النبيري

مثال1: لتكن f الدالة العددية المعرفة ما يلي:

$$f(x)=(x-1)e^x$$

1. حدد D_f أحسب النهايات عند محدات D_f
2. أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
3. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
4. أدرس تقعر (C)
5. أنشئ المنحنى (C)

أجوبة 1) $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x-e^x=0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

مبيانيا : $y=0$ مقارب ل (C) بجوار $-\infty$

2) $f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'$

$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة x

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x=1\times(+\infty)=+\infty$

اذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4) دراسة تقعر (C)

نحسب : $f''(x)=(xe^x)'=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x(1+x)$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $x+1$

$x+1=0$ يعني $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

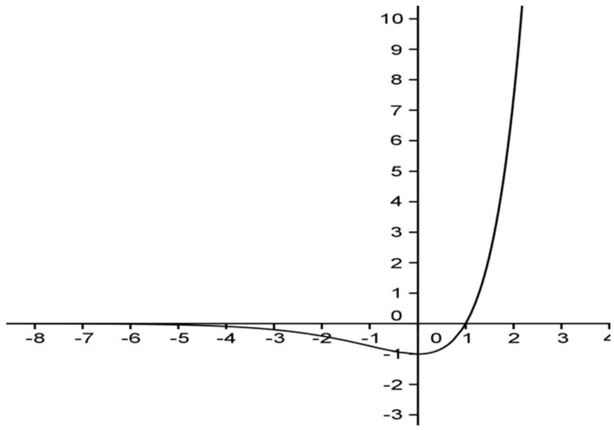
ومنه

- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $]-1;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب السالبة على المجال: $]-\infty,-1[$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

النقطة : $A(-1,-2e^{-1})$ نقطة انعطاف ل (C_f)

(5



مثال2: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة المعرفة كالتالي: $f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محدات D_f
2. حدد تغيرات f و أعط جدول التغيرات
3. تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$
4. حدد معادلة المقاربين المائلين لمنحنى f (مع تحديد الوضع النسبي)

أجوبة 1: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^x+1\neq0\}$

$e^x+1=0$ يعني $e^x=-1$ ليس لها حل لأن : $e^x>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ومنه : $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=+\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x+1}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=-\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{e^x+1}=3$

(2 $f'(x)=\left(x-1+\frac{3}{e^x+1}\right)'=1-3\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=1-3\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$f'(x)=\frac{(e^x+1)^2-3e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x)^2+2e^x+1-3e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x)^2-e^x+1}{(e^x+1)^2}$

اشارة : $f'(x)$ هي اشارة $(e^x)^2-e^x+1$

نضع : $e^x = X$ والمعادلة تصبح : $X^2 - X + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1-4 = -3 < 0$

اذن هذه المعادلة ليس لها حل ومنه اشارتها هي اشارة 1 ومنه :

$(e^x)^2 - e^x + 1 > 0$

ومنه : $f'(x) > 0$ جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3) نتحقق من أن : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x+1}$

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x+1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x+1}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3(e^x+1)+3}{e^x+1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x+1}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x+1}$$

4) نعلم أن : $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x+1}$ يعني $f(x) - (x-1) = \frac{3}{e^x+1}$

اذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{e^x+1} = 0$ ومنه :

$(\Delta)\ y = x-1$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$

لدينا : $f(x) - (x-1) = \frac{3}{e^x+1} > 0$ اذن (C_f) فوق $(\Delta)\ y = x-1$

نعلم أن : $f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x+1}$ يعني

$$f(x) - (x+2) = -\frac{3e^x}{e^x+1}$$

اذن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{3e^x}{e^x+1} = 0$ ومنه :

$(D)\ y = x+2$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) بجوار $-\infty$

لدينا : $f(x) - (x+2) = -\frac{3e^x}{e^x+1} < 0$ اذن (C_f) تحت

$(D)\ y = x+2$

تمرين13: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

1. أحسب النهاية: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}} \cdot \frac{e^x-1}{x}$
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
4. بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \frac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$
5. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
6. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
7. أحسب $f(2\ln 2)$ ثم أنشئ المنحنى (C)

أجوبة 1: $f(x) = (e^x-4)\sqrt{e^x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x-4)\sqrt{e^x-1} = +\infty$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty} e^x - 4 = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^x-1} = +\infty$

2) $$\frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x-4)\sqrt{e^x-1}}{x} = \frac{(e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}{x\sqrt{e^x-1}}$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{(e^x-4)(e^x-1)}{x\sqrt{e^x-1}} = \frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}} \cdot \frac{e^x-1}{x}$$

3) $$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}} \cdot \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}} \cdot \lim_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{x}$$

نعلم أن : $\lim_{x\to0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1$ و $\lim_{x\to0^+} e^x - 4 = -3$ و $\lim_{x\to0^+} \sqrt{e^x-1} = 0^+$

.

اذن : $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$

مبيانيا منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النقطة : $A(0; f(0))$ وموجه نحو الأسفل

4) بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \frac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$$f'(x) = \left((e^x-4)\sqrt{e^x-1}\right)' = (e^x-4)'\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x) = e^x\sqrt{e^x-1} + (e^x-4)\frac{(e^x-1)'}{2\sqrt{e^x-1}} = e^x\sqrt{e^x-1} + \frac{e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2 + e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{2e^x(e^x-1) + e^x(e^x-4)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{3e^x(e^x-2)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

5) اشارة $f'(x)$ هي اشارة $e^x - 2$ لأن : $\frac{3e^x}{2\sqrt{e^x-1}} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$

$e^x - 2 > 0$ يعني $e^x > 2$ يعني $x > \ln 2$

$$f(\ln 2) = \left(e^{\ln 2} - 4\right)\sqrt{e^{\ln 2} - 1} = (2-4)\sqrt{2-1} = -2$$

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

6) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{4}{x}\right)\sqrt{e^x-1}$$

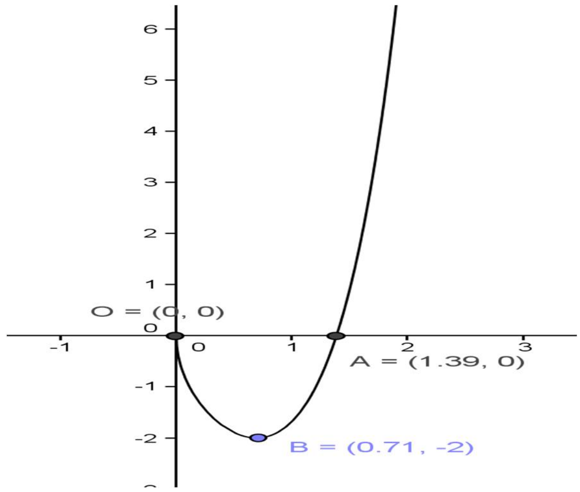
نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

(7

$$f(\ln 2)=\left(e^{2\ln2}-4\right)\sqrt{e^{2\ln2}-1}=\left(e^{\ln4}-4\right)\sqrt{e^{\ln4}-1}=(4-4)\sqrt{4-1}=0$$



تمرين14: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محدات D_f
2. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
3. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
4. حدد $f^{-1}(x)$ $\quad \forall x\in J$

أجوبة : $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1-e^{2x}>0\right\}$$

$1-e^{2x}>0$ يعني $1>e^{2x}$ يعني $e^0>e^{2x}$

يعني $0>2x$ يعني $x<0$

ومنه: $D_f=\left]-\infty,0\right[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}=0^+$

(2 $f'(x)=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}=\frac{\frac{2e^x\left(1-e^{2x}\right)+2e^xe^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-2e^{3x}+2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}=\frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}>0$$

$\forall x\in\left]-\infty,0\right[$

x	$-\infty$		0
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(3 f تزايدية قطعا على المجال $I=\left]-\infty,0\right[$ ومتصلة

وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1}

معرفة على مجال: $J=f(I)=f\left(\left]-\infty,0\right[\right)=\left]0;+\infty\right[$

(4 $\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\x\in J\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=x\\y\in I\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}=x\\y\in\left]-\infty,0\right[\end{cases}$ يعني $\left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2=x^2$ يعني $\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}}=x^2$

$e^{2y}=x^2\left(1-e^{2y}\right)$ يعني $e^{2y}=x^2-x^2e^{2y}$

يعني $e^{2y}+x^2e^{2y}=x^2$

يعني $e^{2y}\left(1+x^2\right)=x^2$ يعني $e^{2y}=\frac{x^2}{1+x^2}$

يعني $2y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$ يعني $y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$

يعني $y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\quad y=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$

ومنه : $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ $\quad \forall x\in\left]0;+\infty\right[$

تمرين15: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$.

(1 أ . بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

ب . بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(2 أ . بين أن $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ . بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i}\ \vec{j})$.

5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

الأجوبة : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1) أ .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

التأويل الهندسي: $y=0$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

ب . $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=-\infty$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$

2)أ . نبين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$.

$$f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1-\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$f(x)=1-\ln\left(e^x+1\right)+\ln\left(e^x\right)=1-\ln\left(e^x+1\right)+x$$

ومنه : $f(x)=x+1-\ln\left(e^x+1\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

ب . وجدنا أن : $f(x)=x+1-\ln\left(e^x+1\right)$ اذن:

$$f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^x+1\right)$$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}-\ln\left(e^x+1\right)=0$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ وبالتالي :

لمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .؟؟؟

ندرس اشارة : $f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^x+1\right)$

نعلم أن : $e^x>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

اذن : $e^x+1>1$ اذن : $\ln\left(e^x+1\right)>\ln 1$ اذن :

$\ln\left(e^x+1\right)>0$

اذن : $-\ln\left(e^x+1\right)<0$ وبالتالي : اذن (C_f) تحت $y=x+1$ (D)

3)أ . نبين أن $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$ ؟؟؟؟

$$f'(x)=\left(x+1-\ln\left(1+e^x\right)\right)'=1-\frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}>0$$

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ 1

ج . دراسة تقعر المنحنى (C) .

$$f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'=-\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$$

$\forall x\in\mathbb{R},$

تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب السالبة على $\mathbb{R},$

ويمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

د . نبين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 ؟؟؟

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$

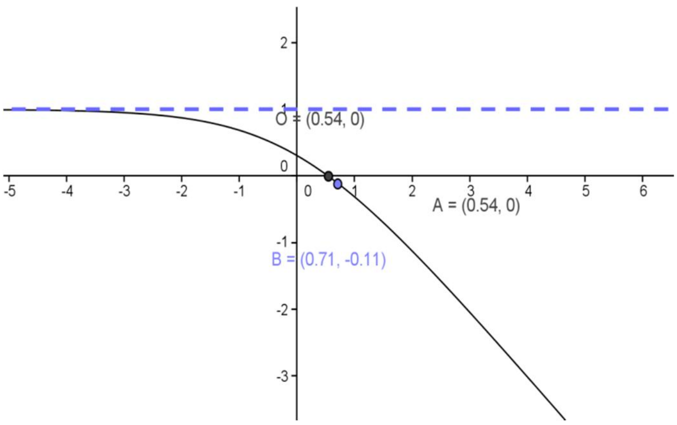
يعني $\ln\left(1+e^{-x}\right)=1$ يعني $\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln e$

يعني $1+e^{-x}=e$ يعني $e^{-x}=e-1$ يعني $-x=\ln(e-1)$

يعني $x=-\ln(e-1)$ ومنه النقطة أفصولها هو :

$x_0=-\ln(e-1)$

4)



5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

f تزايدية قطعا على المجال $\mathbb{R}$ ومتصلة

وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1}

معرفة على مجال: $J=f(I)=f(\mathbb{R})=]-\infty;1[$

ب) $\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases}$

$\begin{cases} 1-\ln(1+e^{-y})=x \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$ يعني $1-x=\ln(1+e^{-y})$

يعني $1+e^{-y}=e^{1-x}$

$e^{-y}=e^{1-x}-1$ يعني $-y=\ln(e^{1-x}-1)$

يعني $y=-\ln(e^{1-x}-1)$

ومنه : $f^{-1}(x)=-\ln(e^{1-x}-1) \quad \forall x\in]-\infty;1[$

تمرين16BIS:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=3-\ln(1+e^{-x})$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ما هو التأويل الهندسي للنتائج المحصل عنها ؟

2) أ . بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+3-\ln(1+e^{x})$.

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ . بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i}\ \vec{j})$.

5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .