

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 9 في درس الحساب التكاملي

محتوى البرنامج

- تكامل دالة متصلة على قطعة
- خاصيات التكامل
- الترتيب و الترتيب
- بعض تقنيات حساب التكامل
- حساب المساحات
- حساب الحجم

القدرات المنتظرة

- حساب تكامل دالة عديدة
- التمكن من حساب مساحة الحيز المحصور بين منحنين
- التمكن من حساب حجم الجسم المولد بدوران منحنى دالة حول محور الأفصيل

I. تكامل دالة متصلة على قطعة

1. تعريف:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a; b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a; b]$.

العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ يسمى تكامل الدالة f من a إلى b و

نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x) dx$ و يقرأ تكامل من a الى b ل

$f(x) dx$

ترميز: العدد $\int_a^b f(x) dx$ يكتب أيضا $[F(x)]_a^b$ ولدينا:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

ملحوظة: في الكتابة $\int_a^b f(x) dx$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير

آخر.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(s) ds = \text{إذن:}$$

$$I = \int_2^4 3x dx \quad \text{1) لنحسب:}$$

الدالة: $x \mapsto 3x$ متصلة على $[2; 4]$

الدالة: $x \mapsto \frac{3}{2}x^2$ أصلية لها على $[2; 4]$

إذن:

$$I = \int_2^4 3x dx = \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_2^4 = \frac{3}{2} \times 4^2 - \frac{3}{2} \times 2^2 = 18$$

$$I = \int_0^1 (2x+3) dx = [x^2 + 3x]_0^1 = (1+3) - (0) = 4 \quad \text{2)}$$

$$J = \int_e^{e^2} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_e^{e^2} = \ln e^2 - \ln e = 2 - 1 = 1 \quad \text{3)}$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin 0 = \frac{1}{2} (4)$$

$$I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx \quad \text{تمرين 1: أحسب التكاملات الآتية:}$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx$$

$$I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx \quad I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt \quad I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt$$

$$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx \quad I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx \quad I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx$$

$$I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$$

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx \quad I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx$$

$$I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx \quad I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx \quad I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx \quad I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx$$

$$I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx$$

$$I_{10} = \int_2^3 \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \int_2^3 \frac{(x^2+3x-4)'}{2\sqrt{x^2+3x-4}} dx = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3$$

$$I_{10} = 2 \left[\sqrt{x^2+3x-4} \right]_2^3 = 2(\sqrt{14} - \sqrt{6})$$

$$I_{11} = \int_0^1 \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = 2 \left[\frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1$$

$$I_{11} = 2 \left[\frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4}{3} (3)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} (1)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \left((\sqrt{3})^3 - 1 \right) = \frac{4}{3} (3\sqrt{3} - 1)$$

$$I_{12} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)' \sin^3 x dx = \left[\frac{1}{4} \sin^4 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$I_{12} = \frac{1}{4} \sin^4 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \sin^4 0 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$I_{13} = \int_1^2 \frac{3}{(3x-4)^5} dx = 3 \int_1^2 (3x-4)^{-5} dx = \int_1^2 (3x-4)' (3x-4)^{-5} dx$$

$$I_{13} = \left[\frac{1}{-5+1} (3x-4)^{-5+1} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{4} (3x-4)^{-4} \right]_1^2 = -\frac{1}{4} (2)^{-4} - \left(-\frac{1}{4} (-1)^{-4} \right)$$

$$I_{13} = \frac{1}{-4} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{64} + \frac{16}{64} = \frac{15}{64}$$

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - \cos 3x) dx = \left[2x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(2 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin \pi \right) - 0$$

$$I_{14} = \frac{2\pi}{3}$$

(الخطا) $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$: نعلم أن $I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x) dx$$

$$I_{15} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$I_{15} = \frac{\pi+2}{8}$$

$$I_{16} = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{(2x+1)'}{2x+1} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|2x+1| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln|3| + 1 - \frac{1}{2} \ln|1| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 3$$

$$I_{17} = \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^3 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^3 x dx$$

$$I_{17} = \left[\frac{1}{3+1} \ln^{3+1} x \right]_1^e = \frac{1}{4} \ln^4 e - \frac{1}{4} \ln^4 1 = \frac{1}{4}$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx$$

$$I_{18} = \int_0^1 (x-1) e^{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \left((x-1)^2 \right)' e^{(x-1)^2} dt = \left[\frac{1}{2} e^{(x-1)^2} \right]_0^1$$

$$I_1 = \int_0^2 (2x-1) dx = \left[\frac{2x^2}{2} - x \right]_0^2 = [x^2 - x]_0^2 : اجوبة$$

$$I_1 = (2^2 - 2) - (0^2 - 0) = 4 - 2 = 2$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 (x^4 - 4x^3 + 2) dx = \left[\frac{1}{5} x^5 - \frac{4}{4} x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + 2x \right]_{-1}^1$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + 2x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} 1^5 - 1^4 + 2 \right) - \left(\frac{1}{5} (-1)^5 - (-1)^4 - 2 \right)$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 \right) - \left(-\frac{1}{5} - 1 - 2 \right) = \frac{1}{5} - 1 + 2 + \frac{1}{5} + 1 + 2 = \frac{2}{5} + 4 = \frac{22}{5}$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$I_4 = \int_0^{\ln 2} e^{2t} dt = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} (2t)' e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} e^{2 \ln 2} - \frac{1}{2} e^{2 \times 0}$$

$$I_4 = \frac{1}{2} e^{\ln 2^2} - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} 4 - \frac{1}{2} e^0 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$I_5 = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t e^{-t^2} dt = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} -\frac{1}{2} (-t^2)' e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}}$$

$$I_5 = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 2}} = -\frac{1}{2} e^{-(\sqrt{\ln 2})^2} + \frac{1}{2} e^{-0^2} = -\frac{1}{2} e^{-(\ln 2)} + \frac{1}{2}$$

$$I_5 = -\frac{1}{2} e^{-\ln 2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{e^{\ln 2}} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$I_6 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln^2 x dx = \int_1^e \ln' x \times \ln^2 x dx$$

$$I_6 = \left[\frac{1}{2+1} \ln^{2+1} x \right]_1^e = \frac{1}{3} \ln^3 e - \frac{1}{3} \ln^3 1 = \frac{1}{3}$$

$$I_7 = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx = \left[\ln|e^x+1| \right]_0^{\ln 2}$$

$$I_7 = \ln|e^{\ln 2} + 1| - \ln|e^0 + 1| = \ln|3| - \ln|2| = \ln 3 - \ln 2 = \ln \left(\frac{3}{2} \right)$$

$$I_8 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x - e^{-x})'}{e^x - e^{-x}} dx = \left[\ln|e^x - e^{-x}| \right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I_8 = \ln|e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}| - \ln|e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}| = \ln \left| 3 - \frac{1}{e^{\ln 3}} \right| - \ln \left| 2 - \frac{1}{e^{\ln 2}} \right|$$

$$I_8 = \ln \left| 3 - \frac{1}{3} \right| - \ln \left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \ln \left(\frac{8}{3} \right) - \ln \left(\frac{3}{2} \right) = \ln \left(\frac{8}{3} \times \frac{2}{3} \right) = \ln \left(\frac{16}{9} \right)$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^1 dx = \left[\frac{1}{1+1} (\ln x)^{1+1} \right]_1^e$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2$$

$$I_9 = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$I = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$$

$$I = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{2}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx \quad \text{مثال 2: نضع:}$$

1. أحسب $I+J$ و $I-J$

2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب:

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = (1)$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 dx = \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \frac{1}{2} \left[\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{بجمع المتساويتين طرف لطرف نجد:} \quad \begin{cases} I+J = \frac{\pi}{4} \\ I-J = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$2I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

يعني: $I = \frac{\pi+2}{8}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد:

$$\frac{\pi+2}{8} + J = \frac{\pi}{4}$$

$$J = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi+2}{8} = \frac{2\pi - \pi - 2}{8} = \frac{\pi-2}{8}$$

$$J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4} dx \quad I = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4} dx \quad \text{تمرين 2: نضع:}$$

1. أحسب $I+J$ و $I-3J$

2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب (1):

$$I+J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4} dx + \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4} dx = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x+3}{e^x+4} + \frac{1}{e^x+4} \right) dx$$

$$I+J = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x+4}{e^x+4} \right) dx = \left[x \right]_0^{\ln 16} = \ln 16 - 0 = 4 \ln 2$$

$$I-3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x+3}{e^x+4} dx - 3 \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x+4} dx = \int_0^{\ln 16} \left(\frac{e^x+3}{e^x+4} - \frac{3}{e^x+4} \right) dx$$

$$I-3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x}{e^x+4} dx = \int_0^{\ln 16} \frac{(e^x+4)'}{e^x+4} dx = \left[\ln |e^x+4| \right]_0^{\ln 16}$$

$$I-3J = \ln |e^{\ln 16} + 4| - \ln |e^0 + 4| = \ln |20| - \ln |5| = \ln 20 - \ln 5$$

$$I-3J = \ln \frac{20}{5} = \ln 4 = 2 \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e = \frac{1}{2} (1-e)$$

$$I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)} dx$$

$$I_{19} = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)} dx = \int_1^2 \frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)} dx = \left[\ln |1+\ln x| \right]_1^2$$

$$I_{19} = \ln |1+\ln 2| - \ln |1+\ln 1| = \ln |1+\ln 2| = \ln (1+\ln 2)$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + (\tan x)^2 - 1 dx$$

$$I_{20} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left((1 + (\tan x)^2) - 1 \right) dx = \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I_{20} = \tan \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$I_{21} = \int_1^e \frac{8x^9 - 4x + 2}{x} dx = \int_1^e \left(8x^8 - 4 + \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= \left[\frac{8}{9} x^9 - 4x + 2 \ln x \right]_1^e = \frac{8}{9} e^9 - 4e + \frac{46}{9}$$

خصائص مهمة: $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$ و $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

و $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ و $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ و $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

II. خصائص ونتائج:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a; b]$ بحيث الدالة f'

متصلة على المجال $[a; b]$

$$\text{لدينا:} \quad \int_a^b f'(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\text{لكل عدد حقيقي } k \text{ لدينا:} \quad \int_a^b k dx = \left[kx \right]_a^b = k(b-a)$$

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a; b]$ لدينا:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad \text{و} \quad \int_a^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$$

2. علاقة شال وخطانية التكامل

خاصية: لتكن f و g دالتين معرفتين و متصلتين على مجال I و

a و b و c عناصر من I و k عددا حقيقيا

$$\text{علاقة شال:} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$\text{الخطانية:} \quad \int_a^b (f+g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \text{و}$$

$$\text{مثال 1: لنحسب التكامل} \quad I = \int_0^3 |x-1| dx$$

لدينا: $x \in [0, 3]$

$x-1=0$ يعني $x=1$ ندرس إشارة $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$$\text{علاقة شال} \quad I = \int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^3 |x-1| dx$$

$$I + J = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} [\sin \pi - \sin 0]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \times \cos 2x dx$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x dx$$

باستعمال القاعدة : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ $a = 2x$ نجد :

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\pi \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$2I = \frac{\pi}{4} \quad \text{بجمع المتساويتين طرف لطرف نجد :} \quad \begin{cases} I + J = 0 \\ I - J = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (2)$$

يعني : $I = \frac{\pi}{8}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد : $\frac{\pi}{8} + J = 0$

يعني : $J = -\frac{\pi}{8}$

تمرين 7: (1) تحقق أنه لكل t من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $\frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$

(2) أحسب التكامل I حيث : $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt$

الجواب (1):

$$\frac{t^2}{1+t} = \frac{(t^2 - 1) + 1}{1+t} = \frac{t^2 - 1}{1+t} + \frac{1}{1+t} = \frac{(t-1)(t+1)}{1+t} + \frac{1}{1+t}$$

$$\mathbb{R} - \{-1\} \quad \text{كل } t \quad \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t} \quad (2)$$

$$I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t} dt = \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{(1+t)'}{1+t} \right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln|1+t| \right]_0^1$$

$$I = \frac{1}{2} - 1 + \ln|2| = -\frac{1}{2} + \ln 2$$

تمرين 8: (1) تحقق أنه لكل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$:

$$\frac{4x-5}{x^2-1} = \frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)}$$

(2) أحسب التكامل I حيث : $I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx$

الجواب :

$$\frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} = \frac{18(x-1) - 2(x+1)}{4(x+1)(x-1)} = \frac{18x - 18 - 2x - 2}{4(x+1)(x-1)} \quad (1)$$

$$= \frac{16x - 20}{4(x+1)(x-1)} = \frac{4x - 5}{(x+1)(x-1)} = \frac{4x - 5}{x^2 - 1}$$

$$I = \int_3^5 \frac{4x-5}{x^2-1} dx = \int_3^5 \left(\frac{9}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} \right) dx \quad (2)$$

بطرح المتساويتين طرف لطرف نجد : $\begin{cases} I + J = 4 \ln 2 \\ I - 3J = 2 \ln 2 \end{cases} \quad (2)$

$$4J = 2 \ln 2$$

يعني : $J = \frac{\ln 2}{2}$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد :

$$I = 4 \ln 2 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{7 \ln 2}{2} \quad \text{يعني :} \quad \frac{\ln 2}{2} + I = 4 \ln 2$$

تمرين 3: احسب التكامل $I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$

الجواب: $x - 2 = 0$ يعني $x = 2$ ندرس إشارة $x - 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$

$$I = \int_1^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx = \int_0^2 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{|x-2|}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{-(x-2)}{(x^2-4x)^2} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{(x^2-4x)^2} dx \quad \text{علاقة شال :}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{-(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx + \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{(x^2-4x)'}{(x^2-4x)^2} dx$$

$$I = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_1^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^2-4x} \right]_2^3$$

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{2}{6} - \frac{2}{8} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

تمرين 4: احسب التكامل $I = \int_0^2 |x^2 - x - 2| dx$

تمرين 5: نضع $A = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t \right) dt$

أحسب $A + B$ $B = \int_1^e \left(1 + \ln \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt$

الجواب:

$$A + B = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t + 1 + \ln \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \ln t + 1 - \ln t \right) dt$$

$$A + B = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + 1 \right) dt = [\ln|t| + t]_1^e = \ln e + e - \ln|1| - 1 = e$$

تمرين 6: نضع : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx$$

1. أحسب $I + J$ و $I - J$

2. استنتج قيمة كل من I و J

الجواب :

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \times \cos 2x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \times \cos 2x dx \quad (1)$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \times 1 dx = \frac{1}{2} [\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

■ إذا كان $a \leq b$ و f موجبة على القطعة $[a; b]$ فإن

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

■ إذا كان $a \leq b$ و $f(x) \leq g(x)$ ($\forall x \in [a; b]$): فإن

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$\frac{1}{6} \leq I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \frac{1}{3} \quad \text{مثال 1: بين أن:}$$

الجواب: لدينا: $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \quad \text{اذن: } 1 \leq x+1 \leq 2$$

$$\frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{1+x} \leq x^2 \quad \text{اذن:}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^2 dx \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\frac{1}{6} \leq I \leq \frac{1}{3} \quad \text{اذن: } \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 \leq I \leq \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \quad \text{ومنه:}$$

مثال 2: لدينا الدالة \ln متصلة و موجبة على القطعة $[1; e]$ و

$$\int_1^e \ln x dx \geq 0 \quad \text{اذن: } 1 \leq e$$

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1 \quad \text{مثال 3: لنبين أن:}$$

ليكن t عنصرا من $[0; 1]$ لدينا $0 \leq t^2 \leq 1$ و منه:

$$-1 \leq -t^2 \leq 0$$

بما أن الدالة $x \mapsto e^x$ تزايدية قطعاً على \mathbb{R} فإن $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$

و بما أن الدالة $t \mapsto e^{-x^2}$ متصلة على المجال $[0; 1]$ و $0 < 1$ فإن:

$$\int_0^1 e^{-1} dt \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 1 dt$$

$$\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq 1 \quad \text{اذن:}$$

تمرين 11: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \text{بين أن (2) تزايدية}$$

الجواب: (1)

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx$$

نعلم أن: $0 \leq x \leq 1$ اذن $0 \leq 1-x$ ولدينا:

$$\frac{x^n}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$$

$$= \frac{9}{2} \int_3^5 \frac{1}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{1}{x-1} dx = \frac{9}{2} \int_3^5 \frac{(x+1)'}{(x+1)} dx - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{(x-1)'}{x-1} dx$$

$$= \frac{9}{2} [\ln|x+1|]_3^5 - \frac{1}{2} [\ln|x-1|]_3^5 = \frac{9}{2} (\ln 6 - \ln 4) - \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2)$$

$$I = \frac{9}{2} \ln 6 - \frac{9}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{9}{2} \ln 6 - \frac{19}{2} \ln 2$$

تمرين 9: للبحث:

1. حدد الأعداد الحقيقية: a و b علما أن:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = ax + \frac{bx}{x^2+1}$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx \quad \text{2. استنتج قيمة التكامل:}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \quad \text{تمرين 10: نضع:}$$

$$1. \text{ بين: } \cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) \quad \text{(عملية الاخطاط)}$$

2. استنتج حساب التكامل: I

الجواب:

$$1) \text{ لنبين أن: } \cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) \quad \text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

$$\text{لدينا: } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{و منه: } \cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4$$

$$= \frac{1}{16} \left((e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 \cdot (e^{-ix}) + 6(e^{ix})^2 \cdot (e^{-ix})^2 + 4(e^{ix}) \cdot (e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4 \right)$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + 4e^{i3x} e^{-ix} + 6e^{2ix} e^{-2ix} + 4e^{ix} e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$= \frac{1}{16} (e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6)$$

$$= \frac{1}{16} ((e^{4ix} + e^{-4ix}) + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6)$$

نعلم أن: $2 \cos nx = e^{inx} + e^{-inx}$ و $2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix}$

$$\text{اذن: } \cos^4 \theta = \frac{1}{16} ((2 \cos 4x) + 4(2 \cos 2x) + 6)$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3)$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3) dx \quad (2)$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4x + 4 \frac{1}{2} \sin 2x + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin 2\pi + 4 \frac{1}{2} \sin \pi + 3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3\pi}{16}$$

III. التكامل و الترتيب:

1. خاصية:

لتكن f و g دالتين متصلتين على المجال I و a و b عنصريين من هذا المجال.

خاصية: لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a; b]$

بحيث الدالتان u' و v' متصلتان على المجال $[a; b]$ لدينا :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

هذه الصيغة تسمى صيغة الكاملة بالأجزاء

مثال 1: لنحسب $I = \int_0^\pi x \sin x dx$

نضع $u'(x) = \sin x$ و $v(x) = x$ و منه $u(x) = -\cos x$ و $v'(x) = 1$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0; \pi]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[0; \pi]$

ومنه:

$$I = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x dx = [-x \cos x]_0^\pi - [-\sin x]_0^\pi = \pi$$

مثال 2: لنحسب $J = \int_0^{\ln 2} x e^x dx$

نضع $u'(x) = e^x$ و $v(x) = x$ و منه $u(x) = e^x$ و $v'(x) = 1$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[0; \ln 2]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[0; \ln 2]$

ومنه: $J = [x e^x]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} 1 e^x dx = \ln 2 e^{\ln 2} - [e^x]_0^{\ln 2}$

$$J = 2 \ln 2 - (e^{\ln 2} - 1) = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1$$

مثال 3: لنحسب $K = \int_1^e \ln x dx$

$$K = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \times \ln x dx$$

نضع $u'(x) = 1$ و $v(x) = \ln x$ و منه $u(x) = x$ و $v'(x) = \frac{1}{x}$

لدينا u و v قابلتان للاشتقاق على المجال $[1; e]$ و u' و v' متصلتان على المجال $[1; e]$

ومنه: $K = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} dx = e \ln e - \int_1^e 1 dx$

$$K = e - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

تمرين 13: باستعمال الكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$J = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{و} \quad I = \int_0^1 x e^{2x} dx$$

الأجوبة: كاملة بالأجزاء :

$$I = \int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$I = \frac{1}{2} [x e^{2x}]_0^1 - \frac{1}{4} [e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

اذن : $\frac{x^n (1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} \geq 0$ ومنه :

$$\int_0^1 \frac{x^n (1-x)}{(1+x^n)(1+x^{n+1})} dx \geq 0$$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ أي: (u_n) تزايدية

لدينا: $0 \leq x^n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 1]$

$$1 \leq x^n + 1 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x^n + 1} \leq 1$$

وبالتالي : $\int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq \int_0^1 1 dx$

اذن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$: ومنه : $\frac{1}{2} [x]_0^1 \leq \int_0^1 \frac{1}{x^n + 1} dx \leq [x]_0^1$

2. القيمة المتوسطة

خاصية و تعريف:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I بحيث $a < b$

يوجد على الأقل عنصر c من المجال $[a; b]$ بحيث:

$$-f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

العدد الحقيقي $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$

تمرين 12: تعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

حدد القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0; \ln 2]$

الجواب: القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0; \ln 2]$ هي :

$$f(c) = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{1}{\ln 2 - 0} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \left[-\frac{1}{e^x + 1} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{2}{3 \ln 2}$$

IV. بعض تقنيات حساب التكامل

1. استعمال الدوال الأصلية

هذه التقنية تعتمد أساسا على الدوال الأصلية الاعتيادية

أمثلة:

$$I = \int_0^{\ln 2} e^{4t} dt = \left[\frac{1}{4} e^{4t} \right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{4} e^{4 \ln 2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^{\ln 16} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$J = \int_1^e \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int_1^e \ln^5 x \ln' x dx = \left[\frac{1}{6} \ln^6 x \right]_1^e = \frac{1}{6}$$

2. الكاملة بالأجزاء:

$$I = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (2x+1) dx = [x^2 + x]_1^3 \quad (4)$$

$$I = (3^2 + 3) - (1^2 + 1) = 12 - 2 = 10$$

$$A(\Delta_f) = \int_1^3 f(x) dx \text{ u.a.} : \text{ نلاحظ أن } (5)$$

في كل ما يلي المستوى منسوب إلى معلم متعامد $(o; \vec{i}; \vec{j})$

وحدة قياس المساحات و التي نرمز لها بالرمز u.a هي مساحة المستطيل OIKJ

يعني أن: $u.a = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\|$

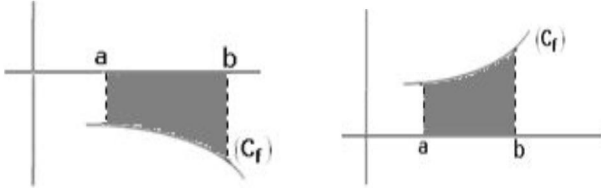
خاصية 1: لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a; b]$

لتكن A مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) منحنى

الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتها على التوالي $x = b$ و $x = a$

• إذا كانت f موجبة على القطعة $[a; b]$ فان: $A = \int_a^b f(x) dx$: بوحدة قياس المساحات (الشكل 1)

• إذا كانت f سالبة على القطعة $[a; b]$ فان: $A = -\int_a^b f(x) dx$: بوحدة قياس المساحات (الشكل 2)



شكل 2

شكل 1

خاصية 2: لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a; b]$

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f

و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتها على التوالي

$x = a$ و $x = b$ هي العدد الحقيقي الموجب $A = \int_a^b |f(x)| dx$ بوحدة قياس المساحات.

مثال 1: المستوى المنسوب الى معلم متعامد منظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ مع

$$\|\vec{i}\| = 2cm$$

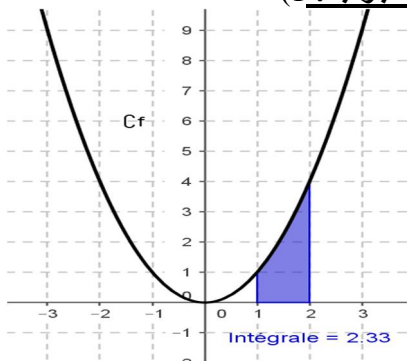
نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = x^2$

(1) أرسم (C_f) أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين

منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتها على

التوالي: $x = 1$ و $x = 2$

الجواب: (1)



$$I = \int_1^{e^3} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_1^{e^3} x^{-\frac{2}{3}} \ln x dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - \int_1^{e^3} \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}} dx = \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 3 \int_1^{e^3} x^{-\frac{4}{3}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3x^{\frac{1}{3}}} \ln x \right]_1^{e^3} - 9 \left[x^{\frac{1}{3}} \right]_1^{e^3} = 9$$

تمرين 14: باستعمال الكاملة بالأجزاء أحسب التكاملات الآتية :

$$J = \int_0^1 (x-1)e^{-x} dx \quad I = \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$M = \int_1^e x(1 - \ln x) dx \quad K = \int_0^1 \ln(1 + \sqrt{x}) dx$$

$$N = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

$$R = \int_1^e x \ln x dx \quad Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

V. حساب المساحات:

نشاط: المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ مع

$\|\vec{i}\| = 1cm$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1; 3]$

كالتالي: $f(x) = 2x + 1$

(1) هل f دالة متصلة على قطعة $[1; 3]$ ؟

(2) أرسم (C_f) منحنى الدالة f على المجال $[1; 3]$

(3) أحسب مساحة حيز المستوى (Δ_f) المحصور بين (C_f) منحنى الدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتها على التوالي $x = 1$ و $x = 3$

(4) أحسب التكامل التالي: $I = \int_1^3 f(x) dx$

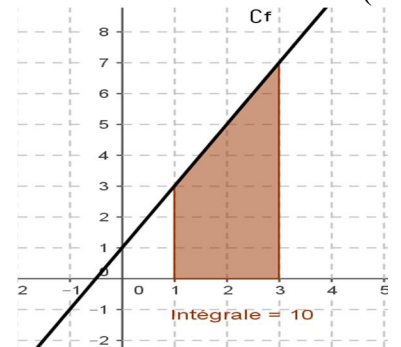
(5) ماذا تلاحظ؟

أجوبة:

(1) f دالة حدودية متصلة على مجموعة تعيها اذن متصلة على

المجال $[1; 3]$

(2)



(3) الشكل المحصل عليه هو عبارة عن شبه منحرف: يمكن حساب مساحته بتقسيمه الى مستطيل ومثلث ومنه نجد :

$$A(\Delta_f) = 2 \times 3 + \frac{4 \times 2}{2} = 2 \times 3c^2m + \frac{4 \times 2}{2} c^2m = 10c^2m$$

(2) حسب الخاصية السابقة يكفي حساب التكامل التالي :

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx$$

$$A = \int_1^2 |f(x)| dx = \int_1^2 |x^2| dx = \int_1^2 x^2 dx =$$

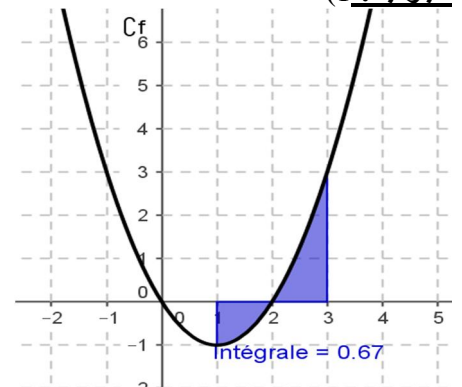
$$A = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2 = \frac{1}{3} \times 2^3 - \frac{1}{3} \times 1^3 = \frac{7}{3} \times 2cm \times 2cm = \frac{28}{3} c^2 m$$

مثال 2: المستوى المنسوب الى معلم متعامد $(o; \vec{i}; \vec{j})$ مع $\|\vec{i}\| = 2cm$

و $\|\vec{j}\| = 3cm$ نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و المستقيمين الذين معادلتها على التوالي: $x=1$ و $x=3$

(الجواب : 1)



(2) حسب الخاصية السابقة يكفي حساب التكامل التالي :

$$A = \int_1^3 |f(x)| dx$$

$$A = \int_1^3 |f(x)| dx = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx =$$

دراسة إشارة $x^2 - 2x$ على المجال $[1; 3]$:

$$x^2 - 2x = 0 \text{ يعني } x(x-2) = 0 \text{ يعني } x=0 \text{ أو } x=2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x^2-2x	$+$	0	$-$	$+$

$$A = \int_1^3 |x^2 - 2x| dx = \int_1^2 |x^2 - 2x| dx + \int_2^3 |x^2 - 2x| dx$$

$$A = \int_1^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

$$A = -\left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 = \left[-\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3$$

$$= -\frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2 + \frac{1}{3} \times 1^3 - 1^2 + \frac{1}{3} \times 3^3 - 3^2 - \frac{1}{3} \times 2^3 + 2^2$$

$$= -\frac{2}{3} \times 2^3 + 8 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{27}{3} - 9 = -\frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{27}{3} - 2$$

$$A = 2 \times 2cm \times 3cm = 12c^2 m$$

تمرين 15: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ مع

و نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = 1 - e^{-x}$ $\|\vec{i}\| = 2cm$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و

المستقيمين الذين معادلتها على التوالي: $x = \ln 2$ و $x = \ln 4$

الجواب:

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx \text{ : يكفي حساب التكامل التالي :}$$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |f(x)| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^{-x}| dx$$

نعلم أن: $\ln 2 \leq x \leq \ln 4$ يعني $e^{\ln 2} \leq e^x \leq e^{\ln 4}$ يعني

$$2 \leq e^x \leq 4$$

اذن $e^x > 1$ أي: $1 - e^{-x} < 0$

ومنه :

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 4} |1 - e^{-x}| dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} -(1 - e^{-x}) dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{-x} - 1) dx$$

$$I = [e^{-x} - x]_{\ln 2}^{\ln 4} = (e^{-\ln 4} - \ln 4) - (e^{-\ln 2} - \ln 2)$$

$$I = (4 - 2\ln 2) - (2 - \ln 2) = 4 - 2\ln 2 - 2 + \ln 2 = 2 - \ln 2$$

$$A = (2 - \ln 2) \times 2cm \times 2cm = 4(2 - \ln 2) c^2 m \text{ : ومنه}$$

تمرين 16 للبحث: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ مع } (o; \vec{i}; \vec{j})$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = e^x - 3$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و

المستقيمين الذين معادلتها على التوالي: $x = \ln 3$ و $x = \ln 6$

تمرين 17 للبحث: المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ مع } (o; \vec{i}; \vec{j})$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x) = \ln x - 1$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالة f و

المستقيمين الذين معادلتها على التوالي: $x = 1$ و $x = e$

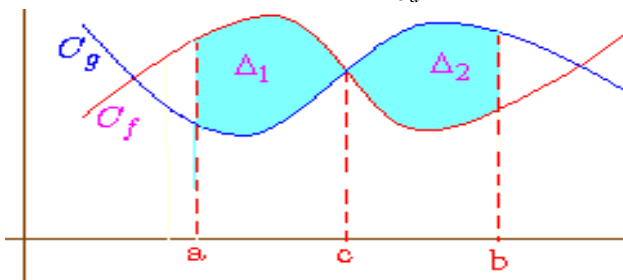
خاصية 3: لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a; b]$, و (C_f) و

(C_g) المنحنيين الممثلين لهما على التوالي في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

مساحة حيز المستوى المحصور بين (C_f) و (C_g) و المستقيمين

الذين معادلتها على التوالي $x = a$ و $x = b$ هي العدد:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \text{ بوحدة قياس المساحات}$$



تمرين 18: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ بحيث

$$\|\vec{i}\| = 2cm$$

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي:

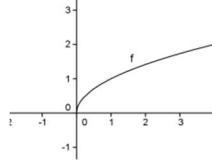
$$g(x) = e^{-x} \text{ و } f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x}$$

أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين منحنى الدالتين

f و g و المستقيمين اللذين معادلتها على التوالي: $x = 0$

و $x = \ln 2$ (إنشاء المنحنيين غير مطلوب)

الجواب:



$$I = \int_0^4 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^4 \pi (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx$$

$$I = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8\pi$$

$$V = 8\pi \times 8c^3 m = 64\pi c^3 m \text{ ومنه:}$$

تمرين 19 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ بحيث

$$\|\vec{i}\| = \frac{2}{3} cm :$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$$

ليكن (C) منحناها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

أحسب V حجم الجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل

على المجال $[0; 1]$

الجواب:

$$I = \int_0^1 \pi (f(x))^2 dx = \int_0^1 \pi (\sqrt{x(e^x - 1)})^2 dx = \pi \int_0^1 x(e^x - 1) dx$$

نحسب أولاً: $\int_0^1 x(e^x - 1) dx$

نستعمل تقنية المكاملة بالأجزاء

نضع $v(x) = x$ و $u'(x) = e^x - 1$ ومنه $u(x) = e^x - x$ و

$$v'(x) = 1$$

$$\text{ومنه: } \int_0^1 x(e^x - 1) dx = \left[x(e^x - x) \right]_0^1 - \int_0^1 1(e^x - x) dx$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 x(e^x - 1) dx = e - 1 - e + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$V = \frac{1}{2} \pi \times \frac{8}{27} c^3 m = \frac{4\pi}{27} c^3 m \text{ وبالتالي: } I = \frac{1}{2} \pi \text{ ومنه:}$$

تمرين 20 للبحث: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

$$(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}) \text{ بحيث: } \|\vec{i}\| = 2cm$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(x) = \sqrt{\ln x}$

ليكن (C) منحناها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

أحسب V حجم الجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل

على المجال $[1; e]$

تمرين 21 للبحث: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\text{بحيث: } \|\vec{i}\| = 2cm$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = x\sqrt{1 - \ln x}$$

الجواب: يكفي حساب التكامل التالي: $I = \int_1^e |f(x) - g(x)| dx$

$$I = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} + e^{-x} - e^{-x} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{2e^x}{e^x + 1} \right| dx = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx$$

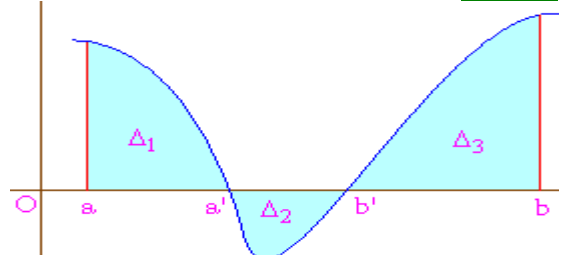
$$\text{لأن: } \frac{2e^x}{e^x + 1} > 0$$

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{2e^x}{e^x + 1} dx = 2 \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx = \left[2 \ln |e^x + 1| \right]_0^{\ln 2} \text{ ومنه:}$$

$$I = 2 \ln |e^{\ln 2} + 1| - 2 \ln |e^0 + 1| = 2 \ln 3 - 2 \ln 2 = 2 \ln \frac{3}{2}$$

$$A = 2 \ln \frac{3}{2} \times 2cm \times 2cm = 8 \ln \frac{3}{2} c^2 m \text{ ومنه:}$$

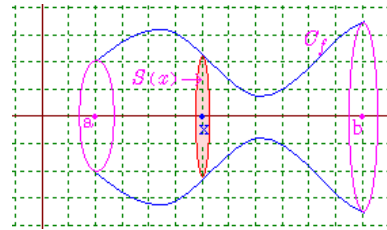
ملاحظة:



$$A(\Delta) = \int_a^{a'} f(x) dx + \int_{a'}^{b'} -f(x) dx + \int_{b'}^b f(x) dx$$

VI. حساب الحجم:

إذا دار (C_f) على محور الأفاصيل دورة كاملة فإنه يولد مجسماً يسمى مجسم الدوران



الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ وحدة قياس الحجم

$$\text{هي: } u.v = \|\vec{i}\| \|\vec{j}\| \|\vec{k}\|$$

$$S(x) = \pi (f(x))^2 \text{ (مساحة دائرة شعاعها } |f(x)| \text{)}$$

خاصية: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و f متصلة

على المجال $[a; b]$

حجم مجسم الدوران المولد عند دوران المنحنى الممثل للدالة f حول

المحور (Ox) هو: $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$ بوحدة قياس

الحجوم.

مثال: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ بحيث:

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ لتكن } f \text{ الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بما يلي:}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ ليكن } (C) \text{ منحناها في المعلم } (o; \vec{i}; \vec{j})$$

أحسب V حجم الجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل

على المجال $[0; 4]$

ليكن (C) منحناها في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$

أحسب V حجم المجسم المولد بدوران (C) حول محور الأفاصيل على المجال $[1; e]$

تمرين 22: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ مع $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x}$

أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين الدالة f و المستقيمت التي معادلاتها على التوالي $y = x - 1$ و $x = 1$ و $x = e$

الجواب: يكفي حساب التكامل التالي: $I = \int_1^e |f(x) - y| dx$

$$I = \int_1^e \left| x - 1 + \frac{\ln x}{x} - (x - 1) \right| dx = \int_1^e \left| \frac{\ln x}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{|\ln x|}{|x|} dx$$

نعلم أن: $1 \leq x \leq e$ يعني $\ln(1) \leq \ln x \leq \ln e$ يعني $0 \leq \ln x \leq 1$

$$\text{ومنه: } I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e (\ln x)' (\ln x)^1 dx$$

$$I = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه: } A = \frac{1}{2} 1\text{cm} \times 1\text{cm} = \frac{1}{2} \text{cm}^2$$