أكاديمية الجهة الشرقية

# تمارين محلولة:المنطق

المستوى : الأولى باك علوم تجريبية

الأستاذ: نجيب عثماني

## تمرين1:

1)أنقل الجدول التالي ثم ضع العلامة "X" في الخانة المناسبة .

| | صحيح | خاطئ |
|---|---|---|
| كل زوجي قابل للقسمة على 4 | | |
| مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي | | |
| $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ | | |
| اذا كان $n^2$ عددا فرديا فان $n$ عدد فردي | | |
| المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ | | |
| جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة | | |
| 114516مضاعف للعدد4 | | |
| $\left((-2)^2=-4\right)$ | | |

2)هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد ؟

## الأجوبة:(1)

| | صحيح | خاطئ |
|---|---|---|
| كل زوجي قابل للقسمة على 4 | | X |
| مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي | X | |
| $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ | | X |
| اذا كان $n^2$ عددا فرديا فان $n$ عدد فردي | X | |
| المعادلة : $x^2=-1$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ | | X |
| جميع المستقيمات المتعامدة في الفضاء متقاطعة | | X |
| 114516مضاعف للعدد4 | X | |
| $\left((-2)^2=-4\right)$ | | X |

2) كل النصوص الرياضيةاما صحيحة و إما خاطئة وتسمى عبارات

وجدول حقيقة عبارة

| $p$ |
|---|
| 1 |
| 0 |

## تمرين2:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية:

- $p \quad \left((-2)^2=4\right)$
- $q \quad \sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

## الأجوبة:

$p$ عبارة صحيحة : $\overline{p} \; : \; \left((-2)^2\neq 4\right)$

$q$عبارة خاطئة : $\overline{q} \; : \; \left(\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\right)$

## تمرين3:

حدد العبارة النافية و قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p \; \left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ و $\left((-2)^2=4\right)$

$q \quad \frac{1}{2}\in\mathbb{N}$ و $\left(\frac{7}{2}>3\right)$

## الأجوبة:

نستعمل جدول حقيقة العطف المنطقي

العبارة p مكونة من عبارتين صحيحتين

اذن هي عبارة صحيحة أنظر جدول

عملية العطف المنطقي:

| $p$ | $q$ | $q$ و $p$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

## تمرين4:

حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

$A \; \left(\sqrt{3}\geq 1\right)$ و $\left((-2)^2>3\right)$

$B \; \sqrt{2}\in Q$ و $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}>3\right)$

$C$ "$\left(\sqrt{2}\leq 1\right)$ و$\left(\pi=3.14\right)$"

## الأجوبة:

نستعمل جدول عملية العطف المنطقي لتحديد قيمة الحقيقة

$A$ عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارتين صحيحتين

$B$ عبارة خاطئة : لأنها عطف عبارة صحيحة مع خاطئة

$C$عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

## تمرين5:

حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$A \; \left(\frac{5}{2}\geq 1\right)$ أو $\left((-2)^2=-4\right)$

$B \; \left(-3\in\mathbb{N}\right)$ أو $\left(5<3\right)$

## الأجوبة:

نستعمل جدول حقيقة الفصل المنطقي

$A$ عبارة صحيحة : لأنها مكونة من عبارة صحيحة و عبارة خاطئة

$B$ عبارة خاطئة: لأنها فصل عبارتين خاطئتين

| $p$ | $q$ | $q$ أو $p$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

$\overline{A} \; \left(\frac{5}{2}<1\right)$ و $\left((-2)^2\neq -4\right)$

$\overline{B} \; \left(-3\notin\mathbb{N}\right)$ و $\left(5\geq 3\right)$

**تمرين6:** حدد قيمة الحقيقة و العبارة النافية لكل عبارة من العبارات الآتية :

$A$ $\left(\sqrt{4}=2\right)$ أو $\left(\frac{1}{2}\in\mathbb{N}\right)$

$B$ $\left((-2)^2>3\right)$ أو 3عدد فردي)

$C$ $\left(\sqrt{2}\le 1\right)$ أو $(\pi=3.14)$)

**الأجوبة:** نستعمل جدول حقيقة الفصل المنطقي

$A$ عبارة صحيحة : لأن $\left(\sqrt{4}=2\right)$ عبارة صحيحة

$B$ عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين صحيحتين

$C$ عبارة خاطئة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

$\overline{A}$ $\left(\sqrt{4}\ne 2\right)$ و $\left(\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}\right)$

$\overline{B}$ $\left((-2)^2\le 3\right)$ و 3عدد زوجي)

$\overline{C}$ $\left(\sqrt{2}>1\right)$ و $(\pi\ne 3.14)$)

**تمرين7:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$A$ ( 2عدد فردي) $\Rightarrow$ $(0,1\in\mathbb{N})$

$B$ ( 4عدد زوجي) $\Rightarrow$ $(-1\in\mathbb{N})$

**الأجوبة:** نستعمل جدول حقيقة الاستلزام المنطقي

| $p$ | $q$ | $p\Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

$A$ عبارة صحيحة

$B$ عبارة خاطئة

**تمرين8:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$p$ $\left(\sqrt{3}\ge 1\right)$ $\Rightarrow$ $\left((-2)^2=-4\right)$

$q$ $\left(\frac{6}{2}=2\right)\Rightarrow\left(\sqrt{5}<3\right)$

**الأجوبة:** نستعمل جدول حقيقة العطف المنطقي

**$p$ عبارة خاطئة :**

لأن $\left(\sqrt{3}\ge 1\right)$ صحيحة

و $\left((-2)^2=-4\right)$ خاطئة

**$q$ عبارة صحيحة**: لأن $\left(\frac{6}{2}=2\right)$ خاطئة و $\left(\sqrt{5}<3\right)$ صحيحة

**تمرين9:** 1)أتمم ملأ الجدول التالي :

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $q$ أو $\overline{p}$ | $(p\Rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| 1 | 0 | | | |
| 0 | 1 | | | |
| 0 | 0 | | | |

2) ماذا تلاحظ؟

**الأجوبة:**

**1)**

| $p$ | $q$ | $\overline{p}$ | $q$ أو $\overline{p}$ | $(p\Rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

2)ألاحظ أن العبارتان $(p\Rightarrow q)$ و $q$ أو $\overline{p}$ متكافئتان

**تمرين10:**

حدد نفي العبارة الآتية : $A"\ x^2=9\Rightarrow x=3$ أو $x=-3"$

**الجواب:** $(p\Rightarrow q)\Leftrightarrow$ $q$ أو $\overline{p}$

ومنه نفي $(p\Rightarrow q)$ هي العبارة $P$ و $\overline{q}$

ومنه $\overline{A}"\ \ x^2=9$ و $(x\ne 3$ و $x\ne -3)$

**تمرين11:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$$p\ \left(2\sqrt{3}\ge\sqrt{10}\right)\ \Leftrightarrow\ \left(\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\right)$$

$$q\qquad -6\in\mathbb{N}\quad\Leftrightarrow (1\ge 3)$$

**الأجوبة:** نستعمل جدول حقيقة التكافؤ المنطقي

$p$ عبارة صحيحة :

لأن $\left(2\sqrt{3}\ge\sqrt{10}\right)$ و $\left(\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\right)$ صحيحتين معا

$q$ عبارة صحيحة : لأنها فصل عبارتين خاطئتين

| $p$ | $q$ | $p\Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

**تمرين12:** نعتبر التعبير التالي :

$$(x\in\mathbb{R});x^2-x\ge 0$$

1)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=2$

2)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=\frac{1}{2}$

3)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $x=-1$

4) هل التعبير صحيح أم خاطئ؟

**الأجوبة:** 1)من أجل $x=2$ نجد : $2\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة صحيحة

2)من أجل $x=\frac{1}{2}$ نجد : $-\frac{1}{4}\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة خاطئة

3)من أجل $x=-1$ نجد : $2\ge 0$

ومنه نحصل على عبارة صحيحة

4) التعبير: $(x\in R);x^2-x\ge 0$ يصبح صحيحا

من أجل بعض قيم $x$ من $\mathbb{R}$ خاطئا من أجل بعض قيم $x$

نقول أننا أمام دالة عبارية تحتوي على متغير $x$

ينتمي إلى المجموعة $\mathbb{R}$ ونكتب : $\exists x\in\mathbb{R}/x^2-x\ge 0$

ونقرأ يوجد $x$ من $\mathbb{R}$ بحيث $x^2-x\ge 0$

**تمرين13:** نعتبر التعبير التالي : $(n\in\mathbb{N});n^2\ge 0$

1)حدد قيمة حقيقة التعبير من أجل $n=2$

2)هل توجد قيم $n$ : ل لا تحقق التعبير السابق؟

**الأجوبة:** 1)من أجل $n=2$ نحصل :على عبارة صحيحة

2)نلاحظ أننا نحصل على عبارة صحيحة مهما تكن قيمة المتغير $n$

نكتب : $\forall n\in\mathbb{N}/n^2\ge 0$

**تمرين14:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

$A\ "(\forall x\in\mathbb{R});x^2>0"$

$B\ "(\forall n\in\mathbb{N});2^n>5(n+1)"$

$C\ "\ \exists x\in\mathbb{N},2x-1=0\ "$

$D\ "(\forall n\in\mathbb{N});\frac{n}{4}\notin\mathbb{N}"$

$E\ "\ n>4\ \Rightarrow\ n>2"$

**الأجوبة:** $A$ عبارة خاطئة : لأن 0 لا يحقق: $(x^2>0)$

$B$ عبارة خاطئة : لأن 0 لا يحقق: $(2^n>5(n+1))$

لأن $(2^0<5(0+1))$

$C$ عبارة خاطئة : لأن $\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$

$D$ عبارة خاطئة : لأن $\frac{4}{4}\in\mathbb{N}$

$E$ عبارة خاطئة

**تمرين15:** حدد قيمة حقيقة كل عبارة من العبارات الآتية :

1. $"\forall x\in\mathbb{R}/x^2>0"$
2. $"\ \exists x\in\mathbb{R},x^2-2=0\ "$
3. $"\ \exists x\in\mathbb{R},x^2+1=0\ \Leftrightarrow$ 5 عدد فردي"
4. $"\ (2<\sqrt{3})\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}/\frac{n}{2}\in\mathbb{N}"$
5. $(\forall x\in\mathbb{R});-1\le\cos x\le 1$
6. $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$
7. $(\exists n\in\mathbb{N})$ $2n+1$ عدد زوجي
8. $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$
9. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y-x>0$
10. $(\exists!x\in\mathbb{R});2x+4=0$
11. $(\exists!x\in\mathbb{R});x^2=2$
12. $(\exists x\in\mathbb{Z});\frac{x}{4}\in\mathbb{Z}$
13. $(\forall x\in\mathbb{R});(\exists y\in\mathbb{R}):y^2=x$

**الأجوبة:** 1) خاطئة 2) صحيحة 3) خاطئة 4) خاطئة 5) صحيحة 6) صحيحة 7) خاطئة 8) خاطئة 9) صحيحة 10) صحيحة 11) خاطئة 12) صحيحة 13) خاطئة نأخذ $x=-1$

**تمرين16:** حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :

1) $(\forall n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\in\mathbb{N}$

2) $(\exists x\in\mathbb{Z}):\frac{x}{4}\in\mathbb{Q}$ و $x^2-2=0$

3) كل الأشجار غير مثمرة في المؤسسة

**الأجوبة:** 1) $(\exists n\in\mathbb{N});\sqrt{n}\notin\mathbb{N}$

2) $(\forall x\in\mathbb{Z}):\frac{x}{4}\notin\mathbb{Q}$ أو $x^2-2\neq 0$

3) توجد شجرة مثمرة في المؤسسة

**تمرين17:** حدد العبارة النافية للعبارات الآتية :1) $(\forall n\in\mathbb{N});2^n\succ 5(n+1)$

2) $"\exists x\in\mathbb{R},x^2-2=0$ و $-\frac{3}{2}\in\mathbb{Q}"$

3) $(\forall n\in\mathbb{N});(\exists m\in\mathbb{N}):n<m$ 4) كل مثلث قائم الزاوية له زاوية حادة

5) توجد نافذة في المؤسسة مكسورة 6) $(\forall n\in\mathbb{Z}):n\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\ge 0$

**الأجوبة:** 1) $(\exists n\in\mathbb{N}):2^n\le 5(n+1)$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}):x^2-2\neq 0$ أو $-\frac{3}{2}\notin\mathbb{Q}$

3) $(\exists n\in\mathbb{N});(\forall m\in\mathbb{N}):n\ge m$

4) يوجد مثلث قائم الزاوية له زاوية غيرحادة

5) كل نوافذ المؤسسة غير مكسورة 6) $(\exists n\in\mathbb{Z}):n\in\mathbb{Z}$ و $n<0$

**تمرين18:** حدد العبارة النافية للعبارات الآتية:

1) $P;(\forall x\in\mathbb{R}):x\neq 2\Rightarrow x^2\neq 4$

2) $Q;(\exists x\in\mathbb{R}):x<2\Rightarrow x^2\ge 2015$

**الأجوبة:** 1) $\overline{P};(\exists x\in\mathbb{R}):x\neq 2$ و $x^2=4$

2) $\overline{Q};(\forall x\in\mathbb{R}):x<2$ و $x^2<2015$

**تمرين19:** ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $\sqrt{2}<x<5\Rightarrow 3<x^2+1<26$

**الأجوبة:** نفترض أن : $\sqrt{2}<x<5$ ونبين أن : $3<x^2+1<26$

لدينا : $\sqrt{2}<x<5$ اذن : $2<x^2<25$ اذن : $3<x^2+1<26$

ومنه : $\sqrt{2}<x<5\Rightarrow 3<x^2+1<26$

**تمرين20:** ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $2\sqrt{3}<x<10\Rightarrow 9<x^2-3<97$

**الأجوبة:** نفترض أن : $2\sqrt{3}<x<10$ ونبين أن : $9<x^2-3<97$

لدينا : $2\sqrt{3}<x<10$ اذن : $12<x^2<100$ اذن : $9<x^2-3<97$

ومنه : $2\sqrt{3}<x<10\Rightarrow 9<x^2-3<97$

**تمرين21:** ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

**الأجوبة:** نفترض أن : $2<x<4$ ونبين أن : $\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

لدينا : $2<x<4$ اذن : $2-1<x-1<4-1$

اذن : $1<x-1<3$ اذن : $\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

ومنه : $2<x<4\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x-1}<1$

**تمرين22:** ليكن $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $-2<x<\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

**الأجوبة:** نفترض أن : $-2<x<\frac{1}{3}$ ونبين أن : $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

لدينا : $-2<x<\frac{1}{3}$ اذن: $-2+4<x+4<\frac{1}{3}+4$ اذن $2<x+4<\frac{13}{3}$

اذن $\frac{3}{13}<\frac{1}{x+4}<\frac{1}{2}$

ولدينا : $-2<x<\frac{1}{3}$ اذن $-6<3x<1$ اذن: $-1<-3x<6$

اذن $4<-3x+5<11$

ومنه : $\frac{12}{13}<\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$ ومنه $\frac{-3x+5}{x+4}<\frac{11}{2}$

**تمرين23:** بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$p\ "(\forall x\in\mathbb{R}^*);x+\frac{1}{x}\ge 2"$

**الأجوبة:** نعتبر: $x=-2$ لدينا : $-2+\frac{1}{-2}=-\frac{5}{2}<2$

اذن : $p$ خاطئة

**تمرين24:** بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$p$ " $\forall x\in ]0;1[$ و $\forall y\in ]0;1[$ , $0<\frac{x+y}{xy(1-xy)}<1$ "

**الجواب :** نعتبر: $x=\frac{1}{2}$ و $y=\frac{1}{2}$ لدينا: $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{12}}=\frac{12}{3}>1$

اذن : $p$ خاطئة

**تمرين25:** بين العبارة التالية خاطئة مع تعليل الجواب:

$p$ " $(\forall x\in\mathbb{R}); x^2\ge x$ "

**الأجوبة:** نعتبر: $x=\frac{1}{2}$ لدينا: $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$ اذن : $p$ خاطئة

**تمرين26:** ليكن $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$

بين أن: $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

**الجواب :** نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le1$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}$ اذن: $x+y\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ اذن: $x+y\le1$

ومنه : $x\le\frac{1}{2}$ و $y\le\frac{1}{2}\Rightarrow x+y\le1$ وبالتالي: $x+y>1\Rightarrow y>\frac{1}{2}$ أو $x>\frac{1}{2}$

**تمرين27:** بين باستعمال الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس أنه : اذا كان : $x\in ]1;+\infty[$ و $y\in ]1;+\infty[$ :

$(x\ne y)\Rightarrow\left(x^2-2x\ne y^2-2y\right)$

**الجواب :** نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x^2-2x-y^2+2y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-2(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-2(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-2)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-2\Rightarrow x=y$ أو $x+y-2=0$

ونعلم أن : $x\in ]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و: ونعلم أن : $x\in ]1;+\infty[$ يعني $y>1$

ومنه $x+y>2$ يعني $x+y-2>0$ ومنه $x+y-2\ne0$

ومنه : $x^2-2x=y^2-2y\Rightarrow x=y$

وبالتالي: $(x\ne y)\Rightarrow\left(x^2-2x\ne y^2-2y\right)$

**تمرين28:** ليكن: $x\in\mathbb{R}$ بين أن: $x\ne-8\Rightarrow\frac{x+2}{x+5}\ne2$

**الجواب :** نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x+2=2(x+5)$

$x+2=2(x+5)\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow -x=8\Rightarrow x=-8$

ومنه : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow x=-8$

**تمرين29:** $x\in ]1;+\infty[$ و $y\in ]2;+\infty[$

بين أن: $(x\ne y)\Rightarrow\left(x^2-3x\ne y^2-3y\right)$

**الجواب :** نستعمل الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس

اذن يكفي أن نبين أن : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$ ؟؟؟؟؟

لدينا: $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x^2-3x-y^2+3y=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-3(x-y)=0\Rightarrow(x-y)(x+y)-3(x-y)=0$

$\Rightarrow(x-y)(x+y-3)=0\Rightarrow x-y=0$ أو $x+y-3\Rightarrow x=y$ أو $x+y-3=0$

ونعلم أن : $x\in ]1;+\infty[$ يعني $x>1$ و: ونعلم أن : $y\in ]2;+\infty[$

يعني $y>2$ ومنه $x+y>3$ يعني $x+y-3>0$ ومنه $x+y-3\ne0$

ومنه : $x^2-3x=y^2-3y\Rightarrow x=y$

وبالتالي: $(x\ne y)\Rightarrow\left(x^2-3x\ne y^2-3y\right)$

**تمرين30:** بين أن : $(\forall a\in\mathbb{R});(\forall b\in\mathbb{R})\quad a^2+b^2\ge2ab$

**الأجوبة:** نستعمل الاستدلال بالتكافؤ:

$a^2+b^2\ge2ab\Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\ge0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(a-b)^2\ge0$ وهذا صحيح لأن المربع دائما موجب

وبالتالي: $(\forall a\in\mathbb{R});(\forall b\in\mathbb{R})\quad a^2+b^2\ge2ab$

**تمرين31:** باستعمال الاستدلال بفصل الحالات:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):|3x-6|=1$

**الأجوبة:** ندرس اشارة : $3x-6$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $3x-6$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**الحالة 1:** اذا كانت : $x\ge2$ فان : $3x-6\ge0$

ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$x=\frac{7}{3}\in S\Leftrightarrow 3x=7\Leftrightarrow 3x-6=1\Leftrightarrow$

**الحالة 2:** اذا كانت : $x\le2$ فان : $3x-6\le0$

ومنه : $(E):|3x-6|=1$

$-3x+6=1\Leftrightarrow-(3x-6)=1\Leftrightarrow$

$x=\frac{5}{3}\in S\Leftrightarrow -3x=-5\Leftrightarrow$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\left\{\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right\}$

**تمرين32:** باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $3+2|x-4|=x+5$

**الجواب :** ندرس اشارة : $x-4$

الحالة 1: اذا كانت : $x\ge4$ فان : $x-4\ge0$ ومنه: $|x-4|=x-4$

$x=10\in S\Leftrightarrow 3+2x-8=x+5\Leftrightarrow 3+2|x-4|=x+5$

الحالة 2: اذا كانت : $x\le4$ فان: $x-4\le0$ ومنه: $|x-4|=-x+4$

$x=2\in S\Leftrightarrow 3-2x+8=x+5\Leftrightarrow 3+2|x-4|=x+5$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{2;10\}$

**تمرين33:** باستعمال الاستدلال بفصل الحالات

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

**الجواب :** ندرس اشارة : $x+1$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**الحالة1:** اذا كانت : $x\ge-1$ فان : $x+1\ge0$

ومنه : $(E):x^2-|x+1|+1=0$

$x(x-1)=0\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x^2-(x+1)+1=0\Leftrightarrow$

$x=0\in S$ أو $x=1\in S\Leftrightarrow$

**الحالة2:** اذا كانت : $x\le-1$ فان: $x+1\le0$

ومنه : $(E): x^2-|x+1|+1=0$

$\Leftrightarrow x^2+(x+1)+1=0 \Leftrightarrow x^2+x+2=0$ وهذه المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$ لأن : $\Delta=-7<0$

ومنه مجموعة الحلول هي : $S=\{0;1\}$

**تمرين34:** باستعمال الاستدلال بفصل الحالات. بين أن : $n^2+n$ عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

**الجواب :** الحالة 1: $n$ عدد زوجي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k$

$n^2+n=(2k)^2+2k=4k^2+2k=2(2k^2+k)=2k'$

ومنه : $n^2+n$ عدد زوجي

الحالة 2: $n$ عدد فردي اذن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

$n^2+n=(2k+1)^2+2k+1=4k^2+4k+1+2k+1$

ومنه : $n^2+n=4k^2+6k+2=2(2k^2+3k+1)=2k'$ عدد زوجي $n^2+n$

وبالتالي : $n^2+n$ عدد زوجي $\forall n\in\mathbb{N}$

**تمرين35:** بين باستعمال الاستدلال بالخلف أن : $\frac{x^2-1}{x^2+1}\neq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}/$

**الأجوبة:** لكي نبرهن أن عبارة صحيحة نفترض أن العبارة خاطئة ونحاول الحصول على تناقض مع المعطيات

نفترض أن : $\exists x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$

يعني $x^2-1=x^2+1$ يعني $-1=+1$ وهذا غير صحيح

**ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي :** $\forall x\in\mathbb{R}/\frac{x^2-1}{x^2+1}\neq1$

**تمرين36:** $n\in\mathbb{N}$ **بين أنه اذا كان** $n^2$ عدد زوجي فان : $n$ عدد زوجي

**الأجوبة:** نفترض أن : $n$ عدد فردي

أي أن : $\exists k\in\mathbb{N}/n=2k+1$

ومنه : $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2k'+1$

أي : $n^2$ عدد فردي و هذا يتناقض مع المعطيات : $n^2$ عدد زوجي

**ومنه ما افترضناه كان خاطئا أي :** $n$ عدد زوجي

**تمرين37:** بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\geq1+2n$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\geq1+2\times0$ أي : $1\geq1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $3^n\geq1+2n$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $3^{n+1}\geq1+2(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\geq2n+3$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$3^n\geq1+2n$ اذن : $3^n\times3\geq3\times(1+2n)$

يعني : $3^{n+1}\geq6n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $6n+3\geq2n+1$ (يمكن حساب الفرق)

$(6n+3)-(2n+1)=6n+3-2n-1=4n+2\geq0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\geq6n+3$ و $6n+3\geq2n+1$ ومنه: $3^{n+1}\geq2n+3$

**تمرين38:** بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};3^n\geq1+n$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0\geq1+0$ أي : $1\geq1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $3^n\geq1+n$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $3^{n+1}\geq1+(n+1)$ أي نبين أن : $3^{n+1}\geq n+2$ ؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $3^n\geq1+n$ اذن : $3^n\times3\geq3\times(1+n)$

يعني : $3^{n+1}\geq3n+3$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $3n+3\geq n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(3n+3)-(n+2)=3n+3-n-2=2n+1\geq0$

لدينا اذن : $3^{n+1}\geq3n+3$ و $3n+3\geq n+2$ ومنه: $3^{n+1}\geq n+2$

**تمرين39:** بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N};2^n\geq1+n$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0\geq1+0$ أي : $1\geq1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $2^n\geq1+n$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $2^{n+1}\geq1+(n+1)$ أي نبين أن : $2^{n+1}\geq n+2$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n\geq1+n$ اذن : $2^n\times2\geq2\times(1+n)$

يعني : $2^{n+1}\geq2n+2$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نلاحظ أن : $2n+2\geq n+2$ (يمكن حساب الفرق)

$(2n+2)-(n+2)=n\geq0$

لدينا اذن : $2^{n+1}\geq2n+2$ و $2n+2\geq n+2$ ومنه: $2^{n+1}\geq n+2$

**تمرين40:** بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N}^* : 1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1=\frac{1\times(1+1)}{2}=\frac{1\times2}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

**المرحلة2:** نفترض أن: $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}$ ؟؟

لدينا : $1+2+3+...+n+(n+1)=(1+2+3+...+n)+(n+1)$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$

اذن : $1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{n\times(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$1+2+3+...+n+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا اذن : $1+2+3+...+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

**تمرين41:** بين $n^3+2n$ يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي $n$

**الجواب :** يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3+2\times0=0$ مضاعف للعدد 3 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3+2n=3k$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$ ؟؟؟؟؟

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ مع $k'=k+n^2+n+1$

ومنه : $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3+2(n+1)=3k'$

وبالتالي $n^3+2n$ يقبل القسمة على 3 مهما يكن العدد الصحيح الطبيعي $n$

**تمرين42:** بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N}^* \;:\; 1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^2=\dfrac{1\times(1+1)\times(2+1)}{6}=\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

**المرحلة2:** نفترض أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$ ؟

لدينا : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\left(1^2+2^2+3^2+...+n^2\right)+(n+1)^2$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{6}$

اذن : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=(n+1)\left(\dfrac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$

$=(n+1)\left(\dfrac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right)=(n+1)\left(\dfrac{2n^2+7n+6}{6}\right)$

ويمكننا أن نلاحظ أن : $2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

ومنه : $1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)\times(n+2)\times(2n+3)}{6}$

**تمرين43:** بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N}^* : 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1^3=\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^3=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

**المرحلة2:** نفترض أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\dfrac{(n+1)\times(n+2)}{2}\right)^2$ ؟؟

لدينا : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(1^3+2^3+3^3+...+n^3\right)+(n+1)^3$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

اذن : $1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3$

$=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\dfrac{n^2}{4}+(n+1)\right)=(n+1)^2\left(\dfrac{n^2+4n+4}{4}\right)$

$=(n+1)^2\dfrac{(n+2)^2}{4}=(n+1)^2\dfrac{(n+2)^2}{2^2}=^2\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N}^* : 1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

**تمرين44:** بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N} : 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $2^0=1$ و $2^{0+1}-1=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

**المرحلة2:** نفترض أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=\left(2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n\right)+2^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

اذن : $=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\times2^{n+1}-1=2^1\times2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$

ومنه : $2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n+2^{n+1}=2^{n+2}-1$

والتالي : $\forall n\in\mathbb{N} : 2^0+2^1+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-1$

**تمرين45:** بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن :

$\forall n\in\mathbb{N} \;:\; 5^0+5^1+5^2...+5^n=\dfrac{5^{n+1}-1}{4}$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $5^0=1$ و $\dfrac{5^{0+1}-1}{4}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n=\dfrac{5^{n+1}-1}{4}$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\dfrac{5^{n+2}-1}{4}$ ؟؟؟؟؟

لدينا : $5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n+5^{n+1}=\left(5^0+5^1+5^2+5^3+...+5^n\right)+5^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $5^0+5^1+5^2...+5^n=\dfrac{5^{n+1}-1}{4}$

اذن : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\dfrac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}$

$=\dfrac{5^{n+1}-1+4\times5^{n+1}}{4}=\dfrac{5\times5^{n+1}-1}{4}=\dfrac{5^{n+2}-1}{4}$

ومنه : $5^0+5^1+5^2...+5^n+5^{n+1}=\dfrac{5^{n+2}-1}{4}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N} \;:\; 5^0+5^1+5^2...+5^n=\dfrac{5^{n+1}-1}{4}$

**تمرين46: 1)** بين أن: $\forall n\in\mathbb{N} \;:\; 3^0+3^1+3^2...+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

2) أ) بين أن : $12n+14\geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n\geq 6 \quad 2^n\geq 6n+7$

**الجواب :** 1) نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $3^0=1$ و $\dfrac{3^{0+1}-1}{2}=1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\dfrac{3^{n+2}-1}{2}$ ؟؟

لدينا : $3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n+3^{n+1}=\left(3^0+3^1+3^2+3^3+...+3^n\right)+3^{n+1}$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $3^0+3^1+3^2...+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

اذن : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}$

$=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}+3^{n+1}=\dfrac{3^{n+1}-1+2\times3^{n+1}}{2}=\dfrac{3\times3^{n+1}-1}{2}=\dfrac{3^{n+2}-1}{2}$

ومنه : $3^0+3^1+3^2...+3^n+3^{n+1}=\dfrac{3^{n+2}-1}{2}$

والتالي : : $\forall n\in\mathbb{N} \;:\; 3^0+3^1+3^2...+3^n=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$

2)أ) نبين أن : $12n+14\geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق :

$(12n+14)-(6(n+1)+7)=2n+14-6n-6-7=6n+1\geq 0$

ومنه : $12n+14\geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2)ب)نبين أن : $2^n\geq 6n+7 \quad \forall n\geq 6$ ؟؟؟؟؟

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

لدينا $2^6 \geq 6\times 6+7$ لأن : $64 \geq 43$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=6$

**المرحلة2:** نفترض أن: $2^n \geq 6n+7$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $2^{n+1} \geq 6(n+1)+7$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $2^n \geq 6n+7$ اذن : $2\times 2^n \geq 2\times(6n+7)$

يعني : $2^{n+1} \geq 12n+14$ اذن لم نجد بعد النتيجة

وحسب السؤال 2)أ) لدينا : $12n+14 \geq 6(n+1)+7 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا اذن : $2^{n+1} \geq 12n+14$ و $12n+14 \geq 6(n+1)+7$

ومنه : $2^{n+1} \geq 6(n+1)+7$

**وبالتالي :** $2^n \geq 6n+7 \quad \forall n\geq 6$ ؟؟؟؟؟

**تمرين47:** بين أنه مهما يكن $n$ من $\mathbb{N}^*$.

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $1\times(1+1)=1\times2=2$ و $\frac{1}{3}\times1\times(1+1)\times(1+2)=\frac{1}{3}\times2\times3=2$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

**المرحلة2:** نفترض أن: $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$

**المرحلة3:** نبين أن :

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)$

اذن: $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)$

$$=\frac{1}{3}n\times(n+1)\times(n+2)+(n+1)\times(n+2)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{1}{3}n+1\right)=(n+1)\times(n+2)\left(\frac{n+3}{3}\right)$$

ومنه $1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+....+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2)=\frac{1}{3}(n+1)\times(n+2)\times(n+3)$

**تمرين48:** بين أنه مهما يكن $n$ من $\mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

**الجواب :** نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

لدينا $\frac{1}{1\times2\times3}=\frac{1}{6}$ و $\frac{1\times(1+3)}{4(1+1)\times(1+2)}=\frac{4}{4\times2\times3}=\frac{1}{6}$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=1$

**المرحلة2:** نفترض أن:

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن:

$$S=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4(n+2)\times(n+3)}$$ ؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع :

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+....+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}$$

اذن :

$$=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)}+\frac{1}{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n+3)^2}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}+\frac{4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

$$=\frac{n\times(n+3)^2+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n\times(n^2+6n+9)+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}$$

يمكننا أن نبين أن : $n^3+6n^2+9n+4=(n+1)^2\times(n+4)$

ومنه: $S=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)^2\times(n+4)}{4(n+1)\times(n+2)\times(n+3)}=\frac{(n+1)\times(n+4)}{4\times(n+2)\times(n+3)}$

ومنه $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+...+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n\times(n+3)}{4(n+1)\times(n+2)} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

**تمرين49:** بين أنه مهما يكن $n$ من $\mathbb{N}$.

$b_n=4^{2n+2}-1$ يقبل القسمة على 15

**الجواب :** يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $b_0=4^{2\times0+2}-1=4^2-1=15$

مضاعف للعدد 15 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/4^{2n+2}-1=15k$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2(n+1)+2}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/4^{2n+4}-1=15k'$ ؟؟؟؟؟

أي نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$ ؟؟؟؟؟

نحسب مثلا : $b_{n+1}-b_n=(4^{2n+4}-1)-(4^{2n+2}-1)$

$$b_{n+1}-b_n=4^{2n+2+2}-4^{2n+2}=4^{2n+2}(4^2-1)$$

$$b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$$

اذن : $b_{n+1}-b_n=15\times4^{2n+1}$ يعني $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+b_n$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k\in\mathbb{N}/b_n=15k$

ومنه $b_{n+1}=15\times4^{2n+1}+15k$ اي $b_{n+1}=15\times(4^{2n+1}+k)$

وبالتالي $\exists k'\in\mathbb{N}/b_{n+1}=15k'$

**تمرين50:** بين أنه مهما يكن $n$ من $\mathbb{N}$.

$n^3-n$ يقبل القسمة على 6

**الجواب :** يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $0^3-0=0$ مضاعف للعدد 6 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $\exists k\in\mathbb{N}/n^3-n=6k$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$ ؟؟؟؟؟

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=$$

$$=(n^3-n)+3n^2+3n=6k+3(n^2+n)=6k+3n(n+1)$$

ونعلم أن : $n(n+1)$ عدد زوجي لأنه جداء عددين متتاليين $n(n+1)=2m$

$$(n+1)^3-(n+1)=6k+3\times2m=6k+6m=6(k+m)=6k'$$

وبالتالي: $\exists k'\in\mathbb{N}/(n+1)^3-(n+1)=6k'$

**تمرين51:** 1)بين أن : $11^{n+1}-1=10\times11^n+11^n-1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن: $11^n-1$ مضاعف للعدد 10 $\forall n\in\mathbb{N}$

**الجواب :** 1) $11^{n+1}-1=11\times11^n-1=(10+1)\times11^n-1=10\times11^n+11^n-1$

2) يعني نبين : $\exists k\in\mathbb{N}/11^n-1=10k$

نستعمل الاستدلال بالترجع و نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $11^0-1=1-1=0$ مضاعف للعدد 10 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $\exists k \in \mathbb{N} / 11^{n+1} - 1 = 10k'$ ؟؟؟؟؟

نعلم حسب 1) $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 11^n - 1$

ولدينا حسب افتراض الترجع : $\exists k \in \mathbb{N} / 11^n - 1 = 10k$

اذن: $11^{n+1} - 1 = 10 \times 11^n + 10k$

اذن: $11^{n+1} - 1 = 10\left(11^n + k\right) = 10k'$ مع $k' = 11^n + k$

ومنه : $11^{n+1} - 1$ مضاعف للعدد 10

وبالتالي: $11^n - 1$ مضاعف للعدد 10 $\forall n \in \mathbb{N}$

## تمرين52:

نضع : $A_n = 3^{2n} - 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) تحقق من أن : $A_{n+1} = 2A_n + 7 \times 3^{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2) بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $A_n$ مضاعف للعدد 7 $\forall n \in \mathbb{N}^*$

**الجواب** 1) $A_{n+1} = 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 3^{2n+2} - 2^{n+1} = 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2^1$

$A_{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = (7+2) \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1$

$A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 3^{2n} - 2^n \times 2^1 = 7 \times 3^{2n} + 2\left(3^{2n} - 2^n\right) = 7 \times 3^{2n} + 2 \times A_n$

2) يعني نبين : $\exists k \in \mathbb{N}^* / A_n = 7k$

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

لدينا $A_1 = 3^{2\times 1} - 2^1 = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

مضاعف للعدد 7 ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 1$

**المرحلة2:** نفترض أن: $\exists k \in \mathbb{N}^* / A_n = 7k$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $\exists k' \in \mathbb{N}^* / A_{n+1} = 7k'$ ؟؟؟؟؟

حسب السؤال1) : $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times A_n$

اذن : $A_{n+1} = 7 \times 3^{2n} + 2 \times A_n = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 7k = 7 \times \left(3^{2n} + 2k\right) = 7 \times k'$

وبالتالي : $A_n = 3^{2n} - 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

## تمرين53:

ليكن $a$ عدد حقيقي موجب قطعا

1)بين باستعمال الاستدلال بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1 + n \times a$

2)استنتج أن : $2^n > n$ $\forall n \in \mathbb{N};$

**الجواب :** 1) نمر بثلاث مراحل :

**المرحلة1:** نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

لدينا $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a$ لأن : $1 \geq 1$ ومنه العبارة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$

**المرحلة2:** نفترض أن: $(1+a)^n \geq 1 + n \times a$ صحيحة

**المرحلة3:** نبين أن: $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \times a$ ؟؟؟؟؟

لدينا حسب افتراض الترجع : $(1+a)^n \geq 1 + n \times a$

اذن : $(1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+n \times a)$

يعني: $(1+a)^{n+1} \geq (1+a)(1+n \times a)$ اذن لم نجد بعد النتيجة

نقارن : $(1+a)(1+n \times a)$ و $1 + (n+1) \times a$ (يمكن حساب الفرق)

$(1+a)(1+n \times a) - \left(1 + (n+1) \times a\right) = 1 + na + a + na^2 - 1 - n \times a - a$

$(1+a)(1+n \times a) - \left(1 + (n+1) \times a\right) = na^2 \geq 0$

اذن : $(1+a)(1+n \times a) \geq \left(1 + (n+1) \times a\right)$

ومنه : $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \times a$

وبالتالي: $\forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1 + n \times a$

2)وجدنا : $\forall a > 0; \forall n \in \mathbb{N}; (1+a)^n \geq 1 + n \times a$

نأخذ مثلا : $a = 1$ فنجد : $\forall n \in \mathbb{N}; (1+1)^n \geq 1 + n \times 1$

أي : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n \geq 1 + n$

ولكن نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + n > n$

اذن : $\forall n \in \mathbb{N}; 2^n > n$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien