# تمارين محلولة:الاتصال

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية الجهة الشرقية

الأستاذ: نجيب عثماني

**تمرين1:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2};x\neq 2 \\ f(2)=4 \end{cases}$. أدرس اتصال الدالة $f$ في النقطة $x_0=2$

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2^2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}x+2=4=f(2)$ ومنه $f$ دالة متصلة عند: $x_0=2$

**تمرين2:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}, x\neq 1 \\ f(1)=4 \end{cases}$ أدرس اتصال الدالة $f$ في النقطة $x_0=1$

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1^3}{x-1}$

نعلم أن : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1^3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x\times1+1^2)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x^2+x\times1+1^2=3\neq f(1)$

ومنه $f$ دالة غير متصلة عند: $x_0=1$ أو متقطعة عند: $x_0=1$

**تمرين3:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}, x\neq 2 \\ f(2)=12 \end{cases}$ أدرس اتصال الدالة $f$ في النقطة $x_0=2$

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2^3}{x-2}$

نعلم أن : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+x\times2+2^2)}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}x^2+x\times2+2^2=12=f(1)$

ومنه $f$ دالة متصلة عند: $x_0=1$

**تمرين4:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{|x|};x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

1. أكتب صيغة الدالة دون استعمال رمز القيمة المطلقة
2. أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)$
3. هل $f$ متصلة عند $x_0=0$ ؟

**الجواب :** (1

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{x};x>0 \\ f(x)=-\dfrac{x^2}{x};x<0 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} f(x)=x;x>0 \\ f(x)=-x;x<0 \end{cases}$

(2 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0=f(0)$

ومنه $f$ متصلة على اليمين عند $x_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}-x=0=f(0)$

ومنه $f$ متصلة على اليسار عند $x_0=0$

(3 نلاحظ أن $f$ متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0=0$

ومنه: نقول $f$ متصلة عند $x_0=0$

**تمرين5:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}-2, x>0 \\ f(x)=x^3-x+1, x\leq 0 \end{cases}$

1. أدرس اتصال الدالة $f$ على اليمين و على اليسار في النقطة $x_0=0$
2. هل الدالة $f$ متصلة في النقطة $x_0=0$ ؟

**الجواب :** $f(0)=0^3-0+1=1$

(1 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{x}-2=\lim\limits_{x\to 0^+}2\dfrac{\sin 2x}{2x}-2=2\times1-2=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0\neq f(0)$

ومنه $f$ غير متصلة على اليمين عند $x_0=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^3-x+1=1=f(0)$

ومنه $f$ متصلة على اليسار عند $x_0=0$

(2 نلاحظ أن $f$ غير متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0=0$

ومنه: $f$ غير متصلة عند $x_0=0$

**تمرين6:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على بما يلي :

$\begin{cases} f(x)=ax^2+2x+3, x\leq 2 \\ f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}, x>2 \end{cases}$

حدد العدد الحقيقي $a$ علما أن الدالة $f$ متصلة في النقطة $x_0=2$

**الجواب :** $f(2)=a\times2^2+2\times2+3=4a+7$

نعلم أن : $f$ متصلة في النقطة $x_0=2$

ومنه $f$ متصلة على اليمين و متصلة على اليسار عند $x_0=2$

**اذن :** $\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=f(2)\\ \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=f(2)\end{cases}$ اذن : $\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+3}{x-1}=4a+7$

**تمرين7:** أدرس اتصال الدوال المعرفة كالتالي:

$$g(x)=\frac{6x^5-7x}{x-3}\ ,\ f(x)=x^4-6x+9$$

$$h(x)=\sin x+2\cos x$$

**الجواب :** $f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$

$g$ دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة $g$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}/x-3\neq0\}$$

$x-3=0$ يعني $x=3$ ومنه : $D_g=\mathbb{R}-\{3\}$

وبالتالي $g$ دالة متصلة على $D_g=\mathbb{R}-\{3\}$

$h$ دالة مكونة من دوال متصلة على $\mathbb{R}$ اذن $h$ متصلة على $\mathbb{R}$

**تمرين8:** أدرس اتصال الدوال المعرفة كالتالي:

1) $f(x)=x^2-16x+1$ (2 $g(x)=\frac{3x+1}{2x^2-x-1}$ (3 $h(x)=\sqrt{3x+9}$

**الجواب :** 1) $f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$

2) $g$ دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة $g$

$$D_g=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-x-1\neq0\}$$

$2x^2-x-1=0$ نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=-1$ و $c=-1$

$$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times2}=\frac{1+3}{4}=\frac{4}{4}=1$ **و** $x_2=\frac{1-3}{2\times2}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

ومنه: $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

وبالتالي $g$ دالة متصلة على $D_g=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$

3) $h$ دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

$$D_h=\{x\in\mathbb{R}/3x+9\geq0\}$$

$3x+9\geq0$ يعني $x\geq-3$ ومنه $D_h=[-3,+\infty[$

وبالتالي $h$ دالة متصلة على $D_h=[-3,+\infty[$

**تمرين9:** أحسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi x}{\sin 3x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+3x+1}{4x^2+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x+1}{x+3}}$

**الجواب :** $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\frac{\pi x}{\sin 3x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\pi\frac{3x}{\sin 3x}\right)$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ اذن : $\lim\limits_{x\to0}\frac{ax}{\sin ax}=1$

ومنه : $\lim\limits_{x\to0}\cos\left(\pi\frac{3x}{\sin 3x}\right)=\cos(\pi)=-1$

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+3x+1}{4x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2}{4x^2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{x}=4$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x+1}{x+3}}=\sqrt{4}=2$

**تمرين10:** حدد صورة المجال $I$ بالدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية:

1. $I=[-2;3]$ و $f(x)=5x-1$
2. $I=[-5;-3]$ و $f(x)=x^2$
3. $I=[-3,1[$ و $J=]-\infty;1[$ و $K=]1;+\infty[$ و $f(x)=\frac{1}{x-1}$

**أجوبة :1)** $f(x)=5x-1$

$f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على : $I=[-2;3]$

$f'(x)=(5x-1)'=5>0$ ومنه وتزايدية قطعا على $I$

$$f(I)=f([-2;3])=[f(-2);f(3)]=[-11;14]$$

**2)** $f(x)=x^2$

$f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على : $I=[-5;-3]$

لأن : $f'(x)=(x^2)'=2x<0$ $x\in[-5;-3]$ يعني $-5\leq x\leq-3$

ومنه تناقصية قطعا على $I$ وبالتالي :

$$f(I)=f([-5;-3])=[f(-3);f(-5)]=[9;25]$$

**3)** $f(x)=\frac{1}{x-1}$

$f$ دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة $f$

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-1\neq0\}$$

$x-1=0$ يعني $x=1$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

ومنه $f$ دالة متصلة على $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

وبالتالي $f$ دالة متصلة على كل المجالات التالية:

$I=[-3,1[$ و $J=]-\infty;1[$ و $K=]1;+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x-1}\right)'=-\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}<0$$

ومنه تناقصية قطعا

$$f(I)=f([-3,1[)=\left]\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x);f(-3)\right]$$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{1}{x-1}=-\infty$ و $f(-3)=-\frac{1}{4}$ ومنه $f(I)=\left]-\infty;-\frac{1}{4}\right]$

$$f(J)=f(]-\infty;1[)=\left]\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x);\lim_{x\to-\infty}f(x)\right[$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ ومنه : $f(J)=f(]-\infty;1[)=]-\infty;0[$

$K=]1;+\infty[$

$$f(K)=f(]1;+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty}f(x);\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)\right[=]0;+\infty[$$

**تمرين11:** حدد صورة المجال $I$ بالدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية:

.1 $I=[1;2]$ $\quad J=[2;+\infty[$ $\quad f(x)=-4x+1$

.2 $I=[2,6[$ و $J=]-\infty;\frac{1}{2}[$ $\quad K=]\frac{1}{2};+\infty[$ $\quad f(x)=\frac{x-1}{2x-1}$

**أجوبة:** (1 $f(x)=-4x+1$

$f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[1;2]$

$f'(x)=(-4x+1)'=-4<0$ ومنه $f$ تناقصية قطعا على $I$

$f(I)=f([1;2])=[f(2);f(1)]=[-7;-3]$

$f(J)=f([2;+\infty[)=]\lim_{x\to+\infty}f(x);f(2)]$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}-4x+1=-\infty$ ومنه: $f(J)=f([2;+\infty[)=]-\infty;-7]$

(2 $f(x)=\frac{x-1}{2x-1}$ دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

نحدد مجموعة تعريف الدالة $f$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\neq 0\}$ $\quad 2x-1=0$ يعني $x=\frac{1}{2}$ ومنه :

$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ومنه $f$ دالة متصلة على $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

وبالتالي $f$ دالة متصلة على كل المجالات التالية:

$I=[2,6[$ و $J=]-\infty;\frac{1}{2}[$ $\quad K=]\frac{1}{2};+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)'=\frac{(x-1)'\times(2x-1)-(x-1)\times(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{1}{(2x-1)^2}>0$$

ومنه تزايدية قطعا $f(I)=f([2,6[)=[f(2);f(6)[=\left[\frac{1}{3};\frac{5}{11}\right[$

$$f(J)=f\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\right)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x);\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}}f(x)\right[$$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}}f(x)=+\infty$

ومنه : $f(J)=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$K=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ $\quad f(K)=f\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)=\left]\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

**تمرين12:** بين أن المعادلة التالية تقبل حلا على الأقل في المجال $I$:

$x^4+x^2+4x-1=0$ $\quad I=[0;1]$

**الجواب :** نضع: $f(x)=x^4+x^2+4x-1$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

$f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[0;1]$

$f(0)=-1$ و $f(1)=5$ اذن : $f(0)\times f(1)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $I=[0;1]$

**تمرين13:** بين أن المعادلات التالية تقبل حلا على الأقل في المجال $I$ في الحالات التالية :

.1 $\sin x+\frac{1}{3}=0$ $\quad I=\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$

.2 $\cos x=x$ $\quad I=[0;\pi]$

**الجواب: (1** نضع: $f(x)=\sin x+\frac{1}{3}$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

$f$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$

$f(0)=\frac{1}{3}>0$ و $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}<0$ اذن: $f(0)\times f\left(-\frac{\pi}{6}\right)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $I$

(2 $\cos x=x$ يعني $\cos x-x=0$

نضع: $f(x)=\cos x-x$ المعادلة تصبح : $f(x)=0$

$f$ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[0;\pi]$

$f(0)=1>0$ و $f(\pi)=-1-\pi<0$ اذن : $f(0)\times f(\pi)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $I$

**تمرين14:** بين أن المعادلة التالية تقبل حلا وحيدا في المجال $I$:

$x^3+2x+1=0$ $\quad I=[-1;0]$

**الجواب :** نضع: $f(x)=x^3+2x+1$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

$f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[-1;0]$

$f(0)=1>0$ و $f(-1)=-2<0$ اذن : $f(0)\times f(-1)<0$

$f'(x)=(x^3+2x+1)'=3x^2+2>0$ ومنه $f$ دالة متصلة تزايدية قطعا على المجال $I=[-1;0]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I$

**تمرين15:** بين أن المعادلات التالية تقبل حلا وحيدا في المجال $I$ في الحالات التالية :

.1 $x^4+2x-3=0$ $\quad I=\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

.2 $2x^3+3x+20=0$ $\quad I=[-2;-1]$

**الجواب: (1** نضع: $f(x)=x^4+2x-3$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

$f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{31}{16}<0$ و $f(\sqrt{2})=1+\sqrt{2}>0$ اذن: $f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(\sqrt{2})<0$

$f'(x)=(x^4+2x-3)'=4x^3+2>0$ لأن : $x\in\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

ومنه $f$ دالة متصلة تزايدية قطعا على المجال $I=\left[\frac{1}{2};\sqrt{2}\right]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I$

(2 نضع: $f(x)=2x^3+3x+20$

المعادلة تصبح : $f(x)=0$

$f$ دالة حدودية اذن متصلة على $\mathbb{R}$ اذن متصلة على: $I=[-2;-1]$

$f(-1)=15>0$ و $f(-2)=-2<0$ اذن : $f(-2)\times f(-1)<0$

$f'(x)=\left(2x^3+3x+20\right)'=6x^2+3>0$

ومنه $f$ دالة متصلة تزايدية قطعا على المجال $I=[-2;-1]$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فان المعادلة $f(x)=0$

تقبل حلا وحيدا في المجال $I$

**تمرين16:** أدرس اتصال الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

1) $h(x)=x^3-x+1+\sin x$

2) $h(x)=\sin\left(x^3-x+1\right)$

**أجوبة: 1)** $h$ هي مجموع دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ اذن هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$

2) $h$ هي مركب دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ اذن هي دالة متصلة على $\mathbb{R}$

$f(x)=x^3-x+1$ و $g(x)=\sin x$ $\quad h=gof$

**تمرين17:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$

1. أدرس تغيرات الدالة $f$ وحدد جدول تغيرات

2. بين أن الدالة $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=]-2;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده

3. حدد الدالة العكسية $g^{-1}$ للدالة $f$ لكل $x$ من $J$

**أجوبة: 1)** $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$

نحدد مجموعة تعريف الدالة $f$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\neq 0\}$

$x+2=0$ يعني $x=-2$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$

$f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{x-3}{x+2}\right)'=\frac{(x-3)'(x+2)-(x-3)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{1(x+2)-1\times(x-3)}{(x+2)^2}=\frac{5}{(x+2)^2}>0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $1$ |

2) $g$ هي قصور الدالة $f$ على المجال $I=]-2;+\infty[$

ومنه $g$ دالة متصلة على المجال $I=]-2;+\infty[$

$g$ تزايدية قطعا على المجال $I=]-2;+\infty[$

ومنه $g$ تقبل دالة عكسية $g^{-1}$ معرفة على مجال: $J=f(I)=f\left(]-2;+\infty[\right)=]-\infty;1[$

3) $\begin{cases}y=g^{-1}(x)\\ x\in f(I)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(y)=x\\ y\in I\end{cases}$

$\begin{cases}g(y)=x\\ y\in]-2;+\infty[\end{cases}$ يعني $\dfrac{y-3}{y+2}=x$ يعني $y-3=x(y+2)$

يعني $y-xy=2x+3$ يعني $y(1-x)=2x+3$

يعني $y=\dfrac{2x+3}{1-x}$ ومنه : $g^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$

ومنه : $g^{-1}:]-\infty;1[\to]-2;+\infty[$

$x\to g^{-1}(x)=\dfrac{2x+3}{1-x}$........

**تمرين18:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$

1. أدرس الدالة $f$ وحدد جدول تغيرات $f$

2. بين أن الدالة $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=]-\infty;-1[$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده

3. حدد الدالة العكسية $g^{-1}$ للدالة $f$ لكل $x$ من $J$

**أجوبة: 1)** $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$

نحدد مجموعة تعريف الدالة $f$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}$

$x+1=0$ يعني $x=-1$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

$f(x)=\dfrac{3x+2}{x+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x+2}{x+1}\right)'=\frac{(3x+2)'(x+1)-(3x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{3(x+1)-1\times(3x+2)}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

نحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x+2}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to-1}3x+2=-1$ و $\lim\limits_{x\to-1}x+1=0$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ |

**ومنه :** $\lim\limits_{x\to-1^+}x+1=0^+$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x+2}{x+1}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to-1^-}x+1=0^-$ و بالتالي : $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x+2}{x+1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x}=3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{x}=3$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\Vert$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty \Vert -\infty$ | $\nearrow$ | $3$ |

2) $g$ هي قصور الدالة $f$ على المجال $I=]-\infty;-1[$

ومنه $g$ دالة متصلة على المجال $I=]-\infty;-1[$

$g$ تزايدية قطعا على المجال $I=]-\infty;-1[$

ومنه $g$ تقبل دالة عكسية $g^{-1}$ معرفة على مجال: $J=f(I)=f\left(]-\infty;-1[\right)=]3;+\infty[$

$$(3 \quad \begin{cases} g(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in f(I) \end{cases}$$

يعني $\begin{cases} g(y)=x \\ y\in ]-\infty;-1[ \end{cases}$ يعني $\frac{3y+2}{y+1}=x$ يعني $3y+2=x(y+1)$

يعني $3y-xy=x-2$ يعني $y(3-x)=x-2$

يعني $y=\frac{x-2}{3-x}$ ومنه : $g^{-1}(x)=\frac{x-2}{3-x}$

ومنه : $g^{-1}:]3;+\infty[\to]-\infty;-1[$

$........x\to g^{-1}(x)=\frac{x-2}{3-x}$

**تمرين19:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ بما يلي : $f(x)=\sqrt{2x-1}$

1. بين أن الدالة $f$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده
2. حدد الدالة العكسية $f^{-1}$ للدالة $f$ لكل $x$ من $J$
3. أرسم المنحنى $(C_f)$ الممثل للدالة $f$ و المنحنى $(C_{f^{-1}})$ الممثل للدالة $f^{-1}$ في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

**أجوبة 1):** $D_f=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[=I$

$f$ دالة متصلة على المجال $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$f'(x)=\left(\sqrt{2x-1}\right)'=\frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}>0$$

$f$ تزايدية قطعا على المجال $I=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

| $x$ | $1/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $+\infty$ |

ومنه $f$ تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة على مجال: $J=f(I)=f\left(\left[\frac{1}{2};+\infty\right[\right)=[0;+\infty[$

$$(2 \quad \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in f(I) \end{cases}$$

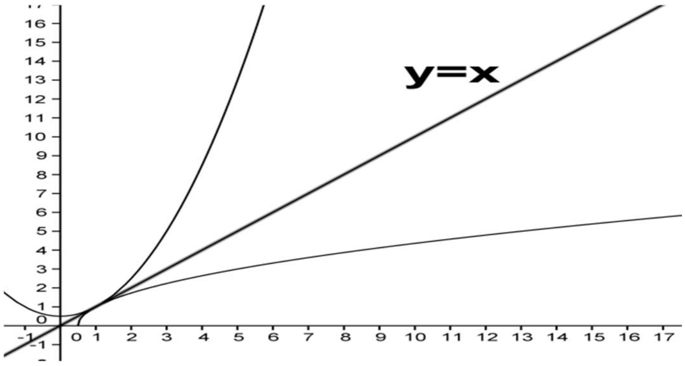
يعني $\begin{cases} f(y)=x \\ y\in [0;+\infty[ \end{cases}$ يعني $\sqrt{2y-1}=x$ يعني $2y-1=x^2$

يعني $2y=x^2+1$ يعني $y=\frac{x^2+1}{2}$ ومنه : $f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}$

ومنه : $f^{-1}:[0;+\infty[\to\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

$........x\to f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2}$

3) منحنى الدالة $f^{-1}$ هو مماثل منحنى الدالة $f$ بالنسبة للمستقيم : $y=x$ في معلم متعامد ممنظم




**تمرين20:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$

ولتكن $g$ قصور الدالة $f$ على المجال $I=[0;+\infty[$

1. حدد مجموعة تعريف الدالة $f$
2. بين أن الدالة $g$ تقبل دالة عكسية معرفة على مجال $J$ يجب تحديده
3. حدد الدالة العكسية $g^{-1}$ للدالة $f$ لكل $x$ من $J$

**الجواب :**

1) نحدد مجموعة تعريف الدالة $f$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1+x^2\neq 0\}$

$1+x^2=0$ يعني $x^2=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}$

2) $f$ دالة جذرية اذن متصلة على مجموعة تعريفها

اذن $g$ متصلة على : $I=[0;+\infty[$

$$g'(x)=\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{(x^2)'\times(x^2+1)-(x^2)\times(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$\forall x\in[0;+\infty[\quad g'(x)=\frac{2x\times(x^2+1)-(x^2)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}\geq 0$$

$g$ تزايدية قطعا على المجال $I=[0;+\infty[$

وبالتالي $g$ تقبل دالة عكسية $g^{-1}$

معرفة على مجال: $J=f(I)=g([0;+\infty[)=[0;1[$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$$(3 \quad \begin{cases} g(y)=x \\ y\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=g^{-1}(x) \\ x\in g(I) \end{cases}$$

يعني $\begin{cases} f(y)=x \\ y\in [0;1[ \end{cases}$ يعني $\frac{y^2}{1+y^2}=x$ يعني $x(y^2+1)=y^2$

يعني $xy^2-y^2=-x$ يعني $y^2(x-1)=-x$ يعني $y^2=\frac{-x}{x-1}=\frac{x}{1-x}$

يعني $y=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ أو $y=-\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ وبما أننا نعلم أن : $y\in[0;1[$

اذن : $y$ موجب ومنه : $y=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ومنه : $g^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

ومنه : $g^{-1}:[0;1[\to[0;+\infty[$

$........x\to g^{-1}(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$

**تمرين21:** 1)أحسب وبسط التعابير التالية :

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3$ و $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$

$A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$ $\quad B=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt{\sqrt[3]{4}}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

$C=\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}$ $\quad D=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times 128000000}{27^2}}$

**2)** قارن : $\sqrt[5]{2}$ **و** $\sqrt[7]{3}$

**3)** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

أ) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ $\qquad$ ب) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$

**4)** أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[5]{x^3+24}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

**أجوبة :**

1) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=2$ و $\sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[2\times 4]{2}=\sqrt[8]{2}$

$A=\sqrt[5]{32}-\left(\sqrt[7]{2}\right)^7+\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}+\dfrac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}=\sqrt[5]{2^5}-2+\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^9}}+\sqrt[4]{\dfrac{96}{3}}=2-2+\sqrt[9]{2^9}+\sqrt[5]{32}$

$A=2-2+2+2=4$

$B=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{16}\times\sqrt[6]{4}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2^4}\times\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$

$B=\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 2^{\frac{2}{6}}\times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}}=\dfrac{2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{4}{5}}\times 2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=\dfrac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}}=2^{\frac{23}{15}-\frac{8}{15}}=2^{\frac{15}{15}}=2$

$C=\dfrac{(27)^{\frac{2}{9}}\times(81)^{\frac{1}{4}}\times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\dfrac{\left(3^3\right)^{\frac{2}{9}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^2\right)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}}=\dfrac{3^{\frac{2}{3}}\times 3^1\times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$

$C=\dfrac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}}=3^{\frac{20}{3}-\frac{17}{3}}=3^{\frac{3}{3}}=3^1=3$

$D=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times 128000000}{27^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^5\times 2^7\times 10^6}{\left(3^3\right)^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{10^6}{3^6}\times 2^{12}}=\sqrt[6]{\dfrac{10^6}{3^6}}\times\sqrt[6]{\left(2^2\right)^6}$

$D=\sqrt[6]{\left(\dfrac{10}{3}\right)^6}\times\sqrt[6]{\left(2^2\right)^6}=\dfrac{10}{3}\times 2^2=\dfrac{40}{3}$

**2)** مقارنة : $\sqrt[5]{2}$ **و** $\sqrt[7]{3}$ نطبق القاعدة **:** $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[7]{3}=\sqrt[7\times 5]{3^5}=\sqrt[35]{243}$ و $\sqrt[5]{2}=\sqrt[7\times 5]{2^7}=\sqrt[35]{128}$

لدينا : $\sqrt[35]{243}>\sqrt[35]{128}$ **لأن :** $243>128$ **ومنه :** $\sqrt[7]{3}>\sqrt[5]{2}$

**3)** أ) $\sqrt[5]{3x-4}=2$ يعني $\left(\sqrt[5]{3x-4}\right)^5=(2)^5$

يعني $3x-4=32$ يعني $3x=36$ يعني $x=12$ **ومنه :**

$S=\{12\}$

ب) $\left(\sqrt[5]{x}\right)^2-5\sqrt[5]{x}+6=0$ **نضع** $\sqrt[5]{x}=X$

المعادلة تصبح : $X^2-5X+6=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=-5$ و $c=6$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 1\times 6=25-24=1>0$

بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ **و** $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{5+1}{2\times 1}=\dfrac{6}{2}=3$ **و** $x_2=\dfrac{5-1}{2\times 1}=\dfrac{4}{2}=2$

ومنه: $\sqrt[5]{x}=2$ أو $\sqrt[5]{x}=3$ يعني $\left(\sqrt[5]{x}\right)^5=(2)^5$ **أو**

$\left(\sqrt[5]{x}\right)^5=(3)^5$

يعني $x=32$ **أو** $x=243$ **ومنه :** $S=\{32;243\}$

**4)** $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[5]{x^3+24}=\sqrt[5]{2^3+24}=\sqrt[5]{8+24}=\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5+2x^3-x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^5}=\sqrt[3]{+\infty}=+\infty$

نحتفظ بأكبر درجة فقط

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)''$ ش غ م

نعلم أن : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

اذن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2}=\dfrac{1}{1+1\times 1+1}=\dfrac{1}{3}$

**تمرين22:** 1)أحسب وبسط: $A=\dfrac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}$

**2)** قارن : $\sqrt[5]{4}$ **و** $\sqrt[4]{3}$

**3)** قارن : $\sqrt[3]{28}$ **و** $\sqrt{13}$ وقارن: $\sqrt[5]{23}$ **و** $\sqrt[15]{151}$

**أجوبة :**

(1

$A=\dfrac{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64}\times\sqrt[3]{\sqrt{252}}\times\sqrt{18}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^{10}}\times\sqrt[5]{2^{10}\times 10^5}}{\sqrt[4]{2^6}\times\sqrt[3]{\sqrt{2^8}}\times\sqrt{2\times 3^2}}=\dfrac{2^{\frac{10}{3}}\times 2\times 10}{2^{\frac{1}{4}}\times 2^{\frac{4}{3}}\times 3\times 2^{\frac{1}{2}}}=20$

**2)**أ) مقارنة : $\sqrt[5]{4}$ **و** $\sqrt[4]{3}$

نطبق القاعدة **:** $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt[5]{4}=\sqrt[4\times 5]{4^4}=\sqrt[20]{4096}$ و $\sqrt[4]{3}=\sqrt[4\times 5]{3^5}=\sqrt[20]{243}$

لدينا : $\sqrt[20]{243}>\sqrt[20]{406}$ **لأن :** $406>243$ **ومنه :** $\sqrt[5]{4}>\sqrt[4]{3}$

ب)مقارنة : $\sqrt[3]{28}$ **و** $\sqrt{13}$

نطبق القاعدة **:** $\sqrt[n\times m]{x^m}=\sqrt[n]{x}$

$\sqrt{13}=\sqrt[2]{13}=\sqrt[2\times 3]{13^3}=\sqrt[6]{2197}$ و $\sqrt[3]{28}=\sqrt[6]{28^2}=\sqrt[6]{784}$

لدينا : $\sqrt[6]{784}>\sqrt[6]{2197}$ **لأن :** $2197>784$

**ومنه :** $\sqrt{13}>\sqrt[3]{28}$

ج)مقارنة : $\sqrt[5]{23}$ **و** $\sqrt[15]{151}$

$\sqrt[5]{23}=\sqrt[15]{23^3}=\sqrt[15]{12167}$ **و منه** $\sqrt[5]{23}>\sqrt[15]{151}$

**تمرين23:** أكتب على شكل جذر من الرتبة n

$2^{\frac{3}{4}}$ و $2^{-\frac{2}{7}}$

**أجوبة :** $2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{8}$

$2^{-\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{2^{-2}}=\sqrt[7]{\dfrac{1}{2^2}}=\sqrt[7]{\dfrac{1}{4}}$

**تمرين24:** 1)أحسب وبسط التعابير التالية :

$$A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}} \quad \text{و} \quad B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

أ) $\sqrt[3]{x-1}=3$ ب) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

3) أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$$

**أجوبة :1)**

$$A=\frac{\sqrt[15]{3^5}\times\sqrt[3]{9}\times\left(\sqrt[5]{9}\right)^3}{\sqrt[5]{3}}=\frac{\left(3^5\right)^{\frac{1}{15}}\times\left(3^2\right)^{\frac{1}{3}}\times\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^3}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A=\frac{3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{2}{3}}\times3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}=\frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A=\frac{3^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{1}{5}}}=3^{\frac{8}{3}-\frac{1}{5}}=3^{\frac{37}{15}}=\left(\sqrt[15]{3}\right)^{37}$$

$$B=\frac{\sqrt[4]{9}\times\sqrt{\sqrt[3]{3^3}\times\sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}=\frac{\left(3^2\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(3^4\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times\left(3\right)^{\frac{1}{8}}}=\frac{3^{\frac{1}{2}}\times3}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{5}}\times\left(3\right)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B=\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}}\times\left(3\right)^{\frac{1}{8}}}=3^{\frac{3}{2}}\times3^{-\frac{4}{5}}\times\left(3\right)^{-\frac{1}{8}}=3^{\frac{3}{2}-\frac{4}{5}-\frac{1}{8}}=3^{\frac{11}{8}-\frac{4}{5}}=3^{\frac{55}{40}-\frac{32}{40}}=3^{\frac{23}{40}}$$

$$B=3^{\frac{23}{40}}=\sqrt[40]{3^{23}}$$

**2)** أ) $\sqrt[3]{x-1}=3$ يعني $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=3^3$ يعني $x-1=27$

يعني $x=28$ ومنه : $S=\{28\}$

ب) $x^{\frac{2}{3}}-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$ يعني $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2-7x^{\frac{1}{3}}-8=0$

**نضع** $x^{\frac{1}{3}}=X$ المعادلة تصبح : $X^2-7X-8=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز $a=1$ و $b=-7$ و $c=-8$

$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times(-8)=49+32=81>0$$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{7+9}{2\times1}=\frac{16}{2}=8 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{7-9}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

ومنه: $x^{\frac{1}{3}}=8$ أو $x^{\frac{1}{3}}=-1$

المعادلة: $x^{\frac{1}{3}}=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

اذن نأخذ فقط $x^{\frac{1}{3}}=8$ تعني $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3=(8)^3$ تعني $x=512$

ومنه : $S=\{512\}$

3) أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5+x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^5}=+\infty$$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ : نعلم أن $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

اذن :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x}+1^2\right)}=\frac{1}{1+1\times1+1}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-(1)^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+1\times\sqrt[3]{x+1}+1^2\right)=1\times3=3$$

**تمرين25:** حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

**(1** $x^5=32$ **(2** $x^7=-128$

**(3** $x^4=3$ **(4** $x^6=-8$

**الأجوبة : 1)** $x^5=32$ اذن: $x>0$

ومنه : $x=\sqrt[5]{32}$ يعني $x=\sqrt[5]{2^5}$ يعني $x=2$ ومنه : $S=\{2\}$

**(2** $x^7=-128$ اذن: $x<0$

ومنه : $x=-\sqrt[7]{128}$ يعني $x=-\sqrt[7]{2^7}$ يعني $x=-2$

ومنه : $S=\{-2\}$

**(3** $x^4=3$ يعني $x=\sqrt[4]{3}$ أو $x=-\sqrt[4]{3}$

ومنه : $S=\left\{-\sqrt[4]{3};\sqrt[4]{3}\right\}$

**(4** $x^6=-8$ $-8<0$

و $x^6\geq0$ ومنه: $S=\Phi$

**« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe. c’est en s’entraînant**

**régulièrement aux calculs et**

**exercices que l’on devient un**

**« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe. c’est en s’entraînant**

**régulièrement aux calculs et**

**exercices que l’on devient un**