أكاديمية الجهة الشرقية

تمارين محلولة:الجداء المتجي في الفضاء

المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

تمرين1: الفضاء منسوب إلى أساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

أحسب $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$. إذا علمت أن: $\|\vec{v}\|=3$ و $\|\vec{u}\|=1$ و $(\overline{\vec{u};\vec{v}})=\frac{\pi}{3}$

الجواب : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta=1\cdot 3\sin\frac{\pi}{3}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

تمرين2: ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا و M و N النقطتين المعرفتين بما يلي: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1)بين أن : $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2)أحسب: $\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{NG}$

3)ماذا تستنتج ؟

أجوبة : 1) $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AH}-\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB}\right)$

$\overrightarrow{NG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{NG}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\wedge\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right)$

لدينا $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{AE}\wedge\overrightarrow{AE}=\vec{0}$ و $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ اذن :

$\overrightarrow{NM}\wedge\overrightarrow{NG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AE}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}=\vec{0}$

3)نستنتج أن المتجهتين : $\overrightarrow{NG}$ و $\overrightarrow{NM}$ مستقيميتين

وبالتالي النقط : M و N و G مستقيمية

تمرين3: الفضاء منسوب إلى أساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

$\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ أحسب $\vec{u}\wedge\vec{v}$

الجواب : $\vec{u}(1;1;1)$ و $\vec{v}(2;1;2)$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-0\vec{j}-\vec{k}=\vec{i}-\vec{k}$$

تمرين4: $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ و $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ أحسب $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$\vec{u}(1;2;1)$ و $\vec{v}(3;-2;-1)$

الجواب : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}2&-2\\1&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&3\\2&-2\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{j}-8\vec{k}$

تمرين5: نعتبر في الفضاء النقط:

$A(0;1;2)$ و $B(1;1;0)$ و $C(1;0;1)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية
2. أحسب مساحة المثلث ABC
3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

الجواب: (1 $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ و $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&-1\\-2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\-2&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

(2 $S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

ومنه : $S_{ABC}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى ABC

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل :

$ax+by+cz+d=0$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ متجهة منظمية عليه اذن :

$a=-2$ و $b=-1$ و $c=-1$

ومنه : $(ABC)\ -2x-1y-1z+d=0$

و نعلم أن: $A(0;1;2)\in(P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

يعني $0-1-2+d=0$ يعني $d=3$

وبالتالي : $(ABC)\ -2x-1y-1z+3=0$

يعني : $(ABC)\ 2x+y+z-3=0$

تمرين6: نعتبر النقط $A(1;1;0)$ و $B(2;3;4)$ و $C(-1;0;3)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ وبين أن النقط A و B و C غير مستقيمية
2. أحسب مساحة المثلث ABC
3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

الجواب: (1 $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1;2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;3)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}2&-1\\4&3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-2\\4&3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-2\\2&-1\end{vmatrix}\vec{k}=10\vec{i}-11\vec{j}+3\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

(2 $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{10^2+(-11)^2+3^2}=\sqrt{230}$$

$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{230}}{2}$$

(3 $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=10\vec{i}-11\vec{j}+3\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى ABC

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل : $ax+by+cz+d=0$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(10;-11;3)$ متجهة منظميه عليه اذن : $a=10$ و $b=-11$ و $c=3$

ومنه : $(ABC)\ 10x-11y+3z+d=0$

و نعلم أن: $A(1;1;0)\in(P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

يعني $10-11+0+d=0$ يعني $d=1$

وبالتالي : $(ABC)\ 10x-11y+3z+1=0$

تمرين7: أحسب مسافة النقطة $M(2;1;1)$ عن المستقيم (D) المعرف بما يلي:

$$(D):\begin{cases}x=1\\ y=1-3t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=4t\end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D):\begin{cases}x=1+0t\\ y=1-3t\ (t\in\mathbb{R})\\ z=0+4t\end{cases}$$

لدينا $A(1;1;0)\in(D)$ و $\vec{u}(0;-3;4)$ متجهة موجهة ل (D)

$\overrightarrow{AM}(1;0;1)$ و $\vec{u}(0;-3;4)$

$$\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}0&-3\\1&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\1&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&-3\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}-4\vec{j}-3\vec{k}$$

$$d\left(M;D\left(A;\vec{u}\right)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}=\frac{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-3)^2}}{\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{25}}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

تمرين8: أحسب مسافة النقطة $B(0;1;2)$ عن المستقيم (D) المعرف بما يلي:

$$(D):\begin{cases}x=-1+t\\ y=2-t\ \ (t\in\mathbb{R})\\ z=2t\end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D):\begin{cases}x=1+t\\ y=2-t\ \ (t\in\mathbb{R})\\ z=0+2t\end{cases}$$

لدينا $A(1;2;0)\in(D)$ و $\vec{u}(1;-1;2)$ متجهة موجهة ل (D)

$\overrightarrow{AB}(-1;-1;2)$ و $\vec{u}(1;-1;2)$ $B(0;1;2)$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&1\\2&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&1\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=0\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$$

$$d(B;D)=\frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}=\frac{\sqrt{0^2+4^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{10}{3}}$$

تمارين للبحث والتثبيت

التمرين 1: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها

$(x-1)^2+y^2+z^2-2y-5=0$.

1. حدد Ω مركز الفلكة (S) و شعاعها r.
2. نعتبر النقطتين $A(-1;2;1)$ و $B(2;-1;1)$, أحسب مساحة المثلث $AB\Omega$.
3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى المماس للفلكة في النقطة A.

التمرين 2: الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط :

$A(1;0;-1)$ و $B(1;3;-1)$ و $C\left(-\frac{1}{3};1;0\right)$.

1. حدد $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.
2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المعرف بالنقط A و B و C.
3. لتكن الفلكة (S) ذات الشعاع $r=1$ و المركز $\Omega(0,0,1)$.

أ. أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) .

ب. بين أن الفلكة (S) مماسة للمستوى (P).

ج. حدد مثلوث إحداثيات نقطة التماس.

التمرين 3: في الفضاء $(\mathcal{E})$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(5;-1;2)$ و $B(1;-3;-2)$ و $C(-2;-1;2)$.

(1 أحسب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC.

(2 أحسب $\left|\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\right|$.

(3 أحسب مسافة النقطة B عن المستقيم (AC).