

$$x_2 = \frac{-1-5}{2 \times 2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}; 0; 1 \right\}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 \neq 0\} \quad (2)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R}

وبالتالي : $D_f = \mathbb{R}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / 2|x-1| \neq 0\} \quad (3)$$

$$2|x-1| = 0 \Leftrightarrow |x-1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ و } x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه: } D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$$

$$D_A = \{x \in \mathbb{R} / 4|x+2| \neq 0\} \quad (4)$$

$$4|x+2| = 0 \Leftrightarrow |x+2| = -\frac{1}{2}$$

وهذه المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} ومنه: $D_A = \mathbb{R}$

$$D_B = \{x \in \mathbb{R} / |x-1| - |x+1| \neq 0\} \quad (5)$$

$$|x-1| - |x+1| = 0 \Leftrightarrow |x-1| = |x+1|$$

$$\Leftrightarrow x-1 = x+1 \text{ و } x-1 = -(x+1)$$

$$x = 0 \Leftrightarrow -1 = 1 \text{ و } 2x = 0$$

$$D_B = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

$$D_C = \{x \in \mathbb{R} / 3 - x^2 \geq 0\} \quad C(x) = \sqrt{3-x^2} \quad (6)$$

$$3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}-x = 0 \text{ و } \sqrt{3}+x = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ و } x = -\sqrt{3}$$

نحدد جدول الإشارة :

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$3-x^2$		-	+	-

$$\text{ومنه: } D_C = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad \text{تمرين 3: تعتبر الدالة } f \text{ المعرفة كالتالي:}$$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 1$

3. بين أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq f(x)$

4. ماذا تستنتج؟ ماذا نقول عن الدالة f ؟

$$\text{الأجوبة: (1) } D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

وهذه المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} $x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$

$$D_f = \mathbb{R}$$

(2) نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$

اذن: $x^2 + 1 \geq 1$ يعني $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

تمرين 1: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

$$g(x) = \frac{3x+1}{2x^2-x-1} \quad (2) \quad f(x) = 2x^3+x+3 \quad (1)$$

$$h(x) = \sqrt{2x^2-x-1} \quad (3)$$

أجوبة: (1) $f(x) = 2x^3+x+3$

يعني $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x - 1 \neq 0\} \quad \text{يعني} \quad g(x) = \frac{3x+1}{2x^2-x-1} \quad (2)$$

نحل المعادلة باستعمال المميز $2x^2 - x - 1 = 0$

$$c = -1 \quad \text{و} \quad b = -1 \quad \text{و} \quad a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{ومنه: } D_g = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x - 1 \geq 0\} \quad h(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1} \quad (3)$$

$$\text{نحدد جدول الإشارة: } x_2 = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x_1 = 1$$

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$
$2x^2-x-1$		+	-	+

$$\text{ومنه: } D_h = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$$

تمرين 2: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي:

$$g(x) = \frac{4x+1}{x^2+x+1} \quad (2) \quad f(x) = \frac{|x|(2x+1)}{x(2x^2+x-3)} \quad (1)$$

$$B(x) = \frac{x^2-3}{|x-1|-|x+1|} \quad (5) \quad A(x) = \frac{x^2-3}{4|x|+2} \quad (4) \quad h(x) = \frac{x^2+x-3}{2|x|-1} \quad (3)$$

$$C(x) = \sqrt{3-x^2} \quad (6)$$

أجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x(2x^2+x-3) \neq 0\}$

$$x(2x^2+x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ و } 2x^2+x-3 = 0$$

نحل المعادلة باستعمال المميز $2x^2+x-3 = 0$

$$c = -3 \quad \text{و} \quad b = 1 \quad \text{و} \quad a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

نعلم أن دالة مكبورة على \mathbb{R} بالعدد 1

سؤال: هل الدالة f مكبورة على \mathbb{R} بالعدد 2؟ نعم

$$\forall x \in \mathbb{R} x^2 \geq 0$$

$$\text{اذن: } x^2+1 \geq 1 \text{ يعني } x^2+1 \geq 0+1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} 0 \leq f(x)$$

نعلم أن دالة مصغورة على \mathbb{R} بالعدد 0

سؤال: هل الدالة f مصغورة على \mathbb{R} بالعدد -1؟ نعم

$$\forall x \in \mathbb{R} 0 \leq f(x) \leq 1$$

اذن: f مكبورة و مصغورة على \mathbb{R} نقول f دالة محدودة على \mathbb{R}

تمرين 4: حدد من بين الدوال التالية الدوال المكبورة و المصغورة و المحدودة

$$1. I = \mathbb{R} \quad f(x) = |x| + 6$$

$$2. I = \mathbb{R} \quad f(x) = 2\cos x + 1$$

$$3. I = \mathbb{R} \quad f(x) = -x^4 - 4$$

$$4. I = \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \sqrt{x} + 6$$

$$5. I = \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x - 2$$

الأجوبة: (1) نعلم أن: $\forall x \in \mathbb{R} |x| \geq 0$

$$\text{اذن: } |x| + 6 \geq 0 + 6 \text{ يعني } |x| + 6 \geq 6$$

$$\forall x \in \mathbb{R} 6 \leq f(x)$$

اذن f دالة مصغورة على \mathbb{R} بالعدد 6

$$2) \text{ نعلم أن: } \forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\text{اذن: } -2 + 1 \leq 2\cos x + 1 \leq 2 + 1 \text{ يعني } -2 \leq 2\cos x + 1 \leq 3$$

$$\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq f(x) \leq 3$$

اذن: f دالة محدودة على \mathbb{R}

$$3) \text{ نعلم أن: } \forall x \in \mathbb{R} x^4 \geq 0 \text{ يعني } -x^4 \leq 0 \text{ يعني } -x^4 - 4 \leq 0 - 4$$

$$\text{يعني } f(x) \leq -4 \text{ ومنه } f \text{ مكبورة على } \mathbb{R} \text{ بالعدد } -4$$

$$4) \text{ نعلم أن: } \forall x \in \mathbb{R}^+ \sqrt{x} \geq 0 \text{ يعني } \sqrt{x} + 6 \geq 0 + 6$$

$$\text{يعني } f(x) \geq 6 \text{ ومنه } f \text{ مصغورة على } \mathbb{R}^+ \text{ بالعدد } 6$$

$$5) \text{ نعلم أن: } \forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\text{اذن: } -3 \leq \sin x - 2 \leq -1 - 2 \text{ يعني } -3 \leq \sin x - 2 \leq -1$$

$$\forall x \in \mathbb{R} -3 \leq f(x) \leq -1$$

اذن: f دالة محدودة على \mathbb{R}

تمرين 5: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = x^2 - 2x + 5$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

$$\forall x \in \mathbb{R} 4 \leq f(x)$$

اذن نحسب الفرق: $f(x) - 4 = x^2 - 2x + 5 - 4 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$

$$\text{ومنه: } \forall x \in \mathbb{R} 4 \leq f(x)$$

وبالتالي f مصغورة على \mathbb{R} بالعدد 4

تمرين 6: نعتبر الدالة f المعرفة

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 1$$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد 3

الجواب: يكفي أن نبين أن: $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq 3$

$$\text{اذن نحسب الفرق: } 3 - f(x) = 3 - (-2x^2 + 4x + 1) = 3 + 2x^2 - 4x - 1 = 2x^2 - 4x + 2$$

$$3 - f(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = 2(x-1)^2 \geq 0$$

$$\text{ومنه: } \forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq 3$$

وبالتالي f مكبورة على \mathbb{R} بالعدد 3

$$\text{تمرين 7: نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة كالتالي: } f(x) = \frac{5+4x^4}{x^4+1}$$

بين أن الدالة f مصغورة بالعدد 4

$$\forall x \in \mathbb{R} 4 \leq f(x)$$

اذن نحسب الفرق:

$$f(x) - 4 = \frac{5+4x^4}{x^4+1} - 4 = \frac{5+4x^4 - 4(x^4+1)}{x^4+1} = \frac{5+4x^4 - 4x^4 - 4}{x^4+1} = \frac{1}{x^4+1} \geq 0$$

$$\text{ومنه: } \forall x \in \mathbb{R} 4 \leq f(x)$$

تمرين 8: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [1; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = -5x - \sqrt{x-1}$$

بين أن الدالة f مكبورة بالعدد -5 على $I = [1; +\infty[$

$$\forall x \in [1; +\infty[f(x) \leq -5$$

نعلم أن: $\forall x \in [1; +\infty[\sqrt{x-1} \geq 0$ يعني $-\sqrt{x-1} \leq 0$

$$\text{ولدينا: } -5x \leq -5 \Leftrightarrow x \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$$

$$\text{من: (1) و (2) نحصل على: } -5 - \sqrt{x-1} - 5x \leq 0 - 5$$

$$\text{يعني } f(x) \leq -5 \text{ ومنه } f \text{ مكبورة على } I = [1; +\infty[\text{ بالعدد } -5$$

$$\text{تمرين 9: نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة كالتالي: } f(x) = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3}$$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

$$2. \text{ بين أن الدالة } f \text{ مكبورة بالعدد } \frac{7}{3} \text{ على } \mathbb{R}.$$

$$3. \text{ بين أن الدالة } f \text{ مصغورة بالعدد } 1 \text{ على } \mathbb{R}.$$

4. ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f ؟

$$\text{الأجوبة: (1)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 3 \neq 0\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 3 \times 1 = 9 - 12 = -3 < 0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R}

$$\text{وبالتالي: } D_f = \mathbb{R}$$

$$2) \text{ يكفي أن نبين أن: } \forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq \frac{7}{3}$$

اذن نحسب الفرق:

$$\frac{7}{3} - f(x) = \frac{7}{3} - \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} = \frac{7(x^2+3x+3) - 3(2x^2+7x+7)}{3(x^2+3x+3)}$$

$$\frac{7}{3} - f(x) = \frac{7x^2+21x+21-6x^2-21x-21}{3(x^2+3x+3)} = \frac{x^2}{3(x^2+3x+3)}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 وجدنا أن: $\Delta < 0$

ومنه اشارتها هي اشارة $a=1$ أي أن: $x^2+3x+3 > 0$

$$\text{وبما أنه لدينا: } x^2 \geq 0 \text{ فان: } \frac{x^2}{x^2+3x+3} \geq 0$$

$$\text{ومنه: } \forall x \in \mathbb{R} f(x) \leq \frac{7}{3} \text{ بالتالي: } f \text{ مكبورة بالعدد } \frac{7}{3} \text{ على } \mathbb{R}.$$

$$3) \text{ يكفي أن نبين أن: } \forall x \in \mathbb{R} 1 \leq f(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} 1 \leq f(x)$$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x)-1 = \frac{2x^2+7x+7}{x^2+3x+3} - 1 = \frac{2x^2+7x+7-(x^2+3x+3)}{x^2+3x+3}$$

$$f(x)-1 = \frac{2x^2+7x+7-x^2-3x-3}{x^2+3x+3} = \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x+3} = \frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3}$$

بالنسبة للحدودية x^2+3x+3 سبق أن وضعنا أن : $x^2+3x+3 > 0$

وبما أنه لدينا : $(x+2)^2 \geq 0$ فان $\frac{(x+2)^2}{x^2+3x+3} \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} 1 \leq f(x)$ بالتالي: الدالة f مصغورة بالعدد 1 على \mathbb{R} .

4) وجدنا أن : $f(x) \leq \frac{7}{3}$ و $1 \leq f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ اي أن f محدودة على \mathbb{R}

ومنه : $\frac{7}{3} \geq f(x) \geq 1 \forall x \in \mathbb{R}$ اي أن f محدودة على \mathbb{R}

تمرين 10: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \cos x$

قارن : $f(x)$ و $f(x+2\pi)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

الجواب : $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = f(x)$

تمرين 11: نعتبر الدوال f و g المعرفة على \mathbb{R}

كالتالي : $f(x) = \cos 6x$ و $g(x) = \sin 7x$

1. بين أن الدالة f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.

2. بين أن الدالة g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$

• إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فان $x + \frac{\pi}{3} \in \mathbb{R}$

$$f\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 6\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(6x + 2\pi) = \cos 6x = f(x)$$

ومنه f دورية و $\frac{\pi}{3}$ دور لها.

$D_g = \mathbb{R}$ (2)

• إذا كانت $x \in \mathbb{R}$ فان $x + \frac{2\pi}{7} \in \mathbb{R}$

$$g\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) = \sin 7\left(x + \frac{2\pi}{7}\right) = \sin(7x + 2\pi) = \sin 7x = g(x)$$

g دورية و $\frac{2\pi}{7}$ دور لها.

تمرين 12: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = x^2 + 2$$

1. أحسب : $f(0)$

2. بين أن : $f(0) \leq f(x)$ على \mathbb{R} وماذا تستنتج؟

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ و $f(0) = 2$

(2) نعلم أن : $0 \leq x^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

اذن : $2 \leq x^2 + 2$ يعني $0 \leq x^2$

يعني $f(0) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

أستنتج أن $f(0)$ هي قيمة دنيا للدالة f على \mathbb{R}

تمرين 13: تكن f دالة معرفة ب: $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

(1) أحسب $f(1)$ و تأكد أن : $f(x) = -2\left(x-1\right)^2 - \frac{3}{2}$

(2) تأكد أن : $f(1) \leq f(x)$ مهما تكن x من \mathbb{R} .

(3) ماذا تستنتج؟

الأجوبة: (1) $D_f = \mathbb{R}$ و $f(1) = 3$

(2) نعلم أن : $0 \leq (x-1)^2$ $\forall x \in \mathbb{R}$

اذن : $0 - \frac{3}{2} \leq (x-1)^2 - \frac{3}{2}$ يعني $-\frac{3}{2} \leq (x-1)^2 - \frac{3}{2}$

يعني $(x-1)^2 - \frac{3}{2} \geq (-2)\left(-\frac{3}{2}\right)$ يعني $f(x) \leq 3 \forall x \in \mathbb{R}$

يعني $f(1) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

(3) أستنتج أن $f(1)$ هي قيمة قصوى للدالة f على \mathbb{R}

تمرين 14: لتكن f دالة معرفة ب: $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$

بين أن : $f(-1)$ هي قيمة دنيا للدالة f على \mathbb{R}

الجواب : يكفي أن نبين أن : $f(-1) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-1) = 2 - 2 + 3 = 3$$

اذن نحسب الفرق :

$$f(x) - f(-1) = 2x^2 + 2x + 3 - 3 = 2x^2 + 2x$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 2 \times 2 = 4 - 16 = -12 < 0$$

اذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=2$ اذن : $2x^2 + 2x - 2 > 0$

ومنه : $f(-1) \leq f(x)$

وبالتالي: $f(-1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على \mathbb{R}

تمرين 15: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2. بين أن $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على \mathbb{R} .

3. بين أن $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على \mathbb{R} .

الأجوبة: (1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 \neq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

ومنه المعادلة ليس لها حل في \mathbb{R} وبالتالي : $D_f = \mathbb{R}$

(2) يكفي أن نبين أن : $f(1) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(1) = \frac{1^2+1}{1^2+1+1} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) - f(1) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{3} = \frac{3x^2+3-2(x^2+x+1)}{3(x^2+x+1)} = \frac{x^2-2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

$$\text{اذن : } f(x) - f(1) = \frac{(x-1)^2}{3(x^2+x+1)}$$

بالنسبة للحدودية : x^2+x+1 وجدنا $\Delta < 0$

اذن: اشارة الحدودية هي اشارة $a=1$ أي : $x^2+x+1 > 0$

ونعلم أن : $(x-1)^2 \geq 0$ اذن : $f(x) - f(1) \geq 0$

ومنه : $f(1) \leq f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

و بالتالي : $f(1)$ هي القيمة الدنيا للدالة f على \mathbb{R} .

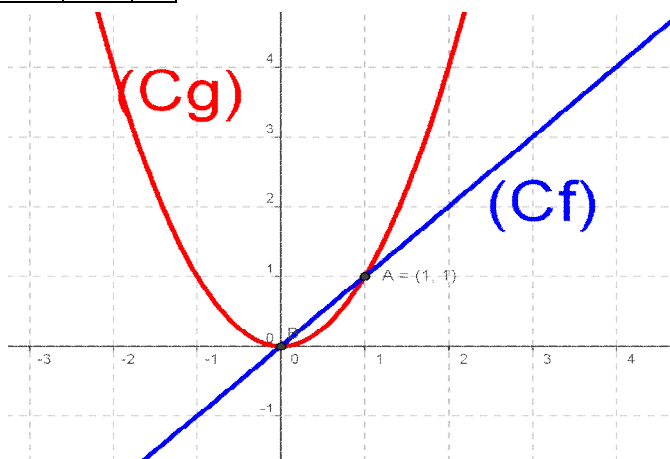
(3) يكفي أن نبين أن : $f(x) \leq f(-1) \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1+1} = 2$$

$$f(-1) - f(x) = 2 - \frac{x^2+1}{x^2+x+1} = \frac{2(x^2+x+1) - (x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{x^2+2x+1}{x^2+x+1}$$

x	0	1
$f(x)$	1	7

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	9	4	1	0	7	4	9



$$g(x) - f(x) = x^2 - x = x(x-1) \quad (2)$$

ندرس إشارة $x(x-1) = 0$: يعني $x-1=0$ أو $x=0$
نرسم جدول الإشارة :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
x^2-x	+	0	-	0	+

الحالة 1: إذا كانت $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ فإن $g \geq f$ بالتالي

منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f على $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

الحالة 2: إذا كانت $x \in [0, 1]$ فإن $f \geq g$ بالتالي منحنى الدالة g يوجد

تحت منحنى f الدالة على $[0, 1]$.

تمرين 19: قارن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = 4x^2 \quad \text{و} \quad g(x) = 4x - 1$$

واعط تأويلا مبيانيا للنتيجة

الجواب: $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

$$f(x) - g(x) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$$

ومنه : $f \geq g$ بالتالي منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على \mathbb{R} .

تمرين 20: أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

$$\text{حيث} \quad f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad \text{و} \quad g(x) = x$$

الجواب: $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) - g(x) = x + \frac{1}{x+1} - x = \frac{1}{x+1}$$

ندرس إشارة $x+1$:

الحالة 1: إذا كانت $x > -1$ فإن $f \geq g$ بالتالي

منحنى الدالة f يوجد فوق منحنى الدالة g على $]-1; +\infty[$.

الحالة 2: إذا كانت $x < -1$ فإن $g \geq f$ بالتالي

منحنى الدالة f يوجد تحت منحنى الدالة g على $]-\infty; -1[$.

تمرين 21: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على \mathbb{R} كالتالي :

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 \quad \text{و} \quad g(x) = -x^2 + 2x + 2$$

أدرس الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و منحنى الدالة g

$$\text{اذن : } f(-1) - f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$$

بالنسبة للحدودية : $x^2 + x + 1$ سبق أن

بيننا أن : $x^2 + x + 1 > 0$

ونعلم أن : $(x+1)^2 \geq 0$ اذن : $f(-1) - f(x) \geq 0$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq f(-1)$

و بالتالي : $f(-1)$ هي القيمة القصوى للدالة f على \mathbb{R} .

تمرين 16: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} كالتالي :

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} - x^2 \quad \text{بين أن الدالة } f \text{ مكبورة بالعدد } \frac{1}{2}$$

الجواب: يكفي أن نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} - f(x) = \frac{1}{2} - x\sqrt{x^2+1} + x^2 = \frac{1 - 2x\sqrt{x^2+1} + 2x^2}{2} = \frac{1 - 2x\sqrt{x^2+1} + 2x^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} - f(x) = \frac{x^2+1 - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2}{2} = \frac{(\sqrt{x^2+1})^2 - 2\sqrt{x^2+1}x + x^2}{2} = \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)^2}{2} \geq 0$$

ومنه f مكبورة بالعدد $\frac{1}{2}$.

تمرين 17: لتكن الدالتين العدديتين f و g المعرفتين

على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x^2$

1. مثل الدالتين f و g في نفس المعلم

2. أدرس إشارة الفرق : $g(x) - f(x)$ وماذا تستنتج مبيانيا؟

(الأجوبة: 1)

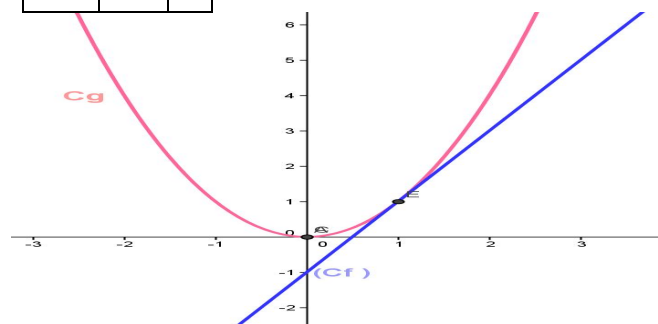
$D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \mathbb{R}$ لأنهم

دوال حدودية

x	-3	-2	-1	0	1	2	
$g(x)$	9	4	1	0	7	4	9

x	0	1
$f(x)$	-1	7



$$(2) \quad g(x) \geq f(x) \quad \text{ومنه} \quad g(x) - f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

نقول أننا قمنا بمقارنة للدالتين f و g وجدنا أن : $g \geq f$

أستنتج مبيانيا أن منحنى الدالة g يوجد فوق منحنى الدالة f على \mathbb{R}

تمرين 18: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = x \quad \text{و} \quad g(x) = x^2$$

1. حدد D_f و D_g

2. أرسم في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالتين f و g

3. قارن f و g

(الأجوبة: 1) $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}$ لأنهم دوال حدودية

تمرين 25: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = x - 3 \text{ و } g(x) = \sqrt{x+1}$$

حدد : D_g و $D_{g \circ f}$ ثم أحسب $(g \circ f)(x)$ $\forall x \in D_{g \circ f}$

الجواب : $D_f = \mathbb{R}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} = [-1, +\infty[$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ و } f(x) \in [1, +\infty[\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \in [-1, +\infty[\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\} \Leftrightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x - 3 \geq -1\}$$

$$D_{g \circ f} = [2; +\infty[$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-3) = \sqrt{x-3+1} = \sqrt{x-2}$$

تمرين 26: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = 4x - 3 \text{ و } g(x) = -3x + 2$$

أدرس رتبة f و g

أجوبة (1): $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $4x_1 < 4x_2$ اذن : $4x_1 - 3 < 4x_2 - 3$

اذن : $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على \mathbb{R}

$D_g = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

ليكن : $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $-3x_1 > -3x_2$ اذن : $-3x_1 + 2 > -3x_2 + 2$ اذن :

$$g(x_1) > g(x_2)$$

ومنه الدالة g تناقصية على \mathbb{R}

تمرين 27: لتكن f الدالة العددية المعرفة كالتالي : $f(x) = 2x^2$

(1) حدد D_f

(2) أدرس رتبة f على كل من المجالين : $[0; +\infty[$ و $] -\infty; 0]$

(3) حدد جدول تغيرات

أجوبة (1): $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) أ) دراسة رتبة الدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

ليكن : $x_1 \in [0; +\infty[$ و $x_2 \in [0; +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $x_1^2 < x_2^2$ ومنه $2x_1^2 < 2x_2^2$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[0; +\infty[$

ب) دراسة رتبة الدالة f على المجال $] -\infty; 0]$:

ليكن : $x_1 \in] -\infty; 0]$ و $x_2 \in] -\infty; 0]$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن : $x_1^2 > x_2^2$ ومنه $2x_1^2 > 2x_2^2$ أي $f(x_1) > f(x_2)$

ومنه الدالة f تناقصية على $] -\infty; 0]$

(3) حدد جدول تغيرات الدالة f .

الجواب : $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 5 - (-x^2 + 2x + 2) = 2x^2 - 5x + 3$$

ندرس إشارة $2x^2 - 5x + 3$:

$$a = 2 \text{ و } b = -5 \text{ و } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 25 - 24 = 1 > 0$$

بما أن $\Delta > 0$ فان لهذه الحدودية جذرين هما :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{2 \times 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ و } x_2 = \frac{5-1}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1$$

x	$-\infty$	1	$3/2$	$+\infty$	
$2x^2 - 5x + 3$	+	0	-	0	+

الحالة 1: اذا كانت $x \geq 3/2$ أو $x \leq 1$ فان $f \geq g$ بالتالي معنى الدالة f يوجد فوق معنى الدالة g على $]\frac{3}{2}, +\infty[\cup]-\infty, 1]$.

الحالة 2: اذا كانت $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ فان $f \geq g$ بالتالي معنى

الدالة f يوجد تحت معنى الدالة g على $]\frac{3}{2}, 1]$.

تمرين 22: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = x + 1 \text{ و } g(x) = x^2$$

حدد : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ و

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ماذا تلاحظ ؟

الجواب: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

نلاحظ : $g \circ f \neq f \circ g$

تمرين 23: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = -x + 1 \text{ و } g(x) = x^3 - x$$

حدد $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x+1) = (-x+1)^3 - (-x+1)$$

$$(g \circ f)(x) = (1-x)^3 - (-x+1) = 1^3 - 3 \times 1 \times x + 3 \times 1 \times x^2 - x^3 + x - 1$$

$$(g \circ f)(x) = 1^3 - 3x + 3x^2 - x^3 + x - 1 = -x^3 + 3x^2 - 2x$$

تمرين 24: لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين كالتالي :

$$f(x) = x - 1 \text{ و } g(x) = \sqrt{x}$$

حدد : D_g و D_g و $D_{g \circ f}$ ثم أحسب $(g \circ f)(x)$ $\forall x \in D_{g \circ f}$

الجواب : $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = [0; +\infty[$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ و } f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ و } f(x) \in [0; +\infty[\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ و } x+1 \in [0; +\infty[\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\} \Leftrightarrow D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0\}$$

$$D_{g \circ f} = [-1; +\infty[$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{x-1}$$



« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe. c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

تمرين 28: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) أدرس رتابة الدالة f على D_f وحدد جدول تغيرات f

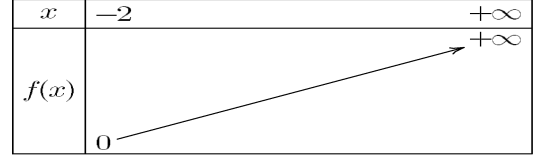
(3) أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب (1): $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$

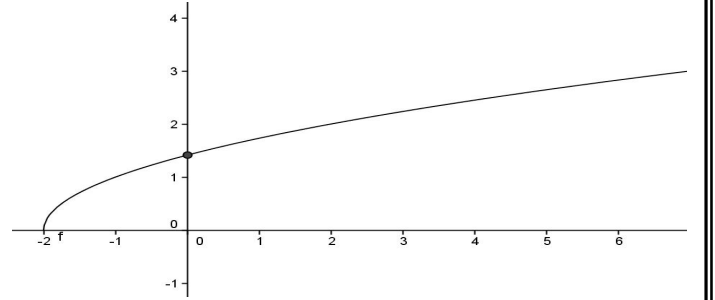
(2) ليكن $x_1 \in [-2; +\infty[$ و $x_2 \in [-2; +\infty[$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1 + 2 < x_2 + 2$ ومنه $\sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2}$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على $[-2; +\infty[$



x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



تمرين 29: لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3$$

(1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

(2) بين أن الدالة f تناقصية قطعاً على D_f وحدد جدول تغيرات f

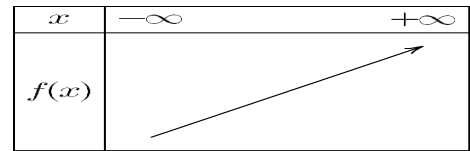
(3) أنشئ التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

الجواب (1): $D_f = \mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

(2) ليكن $x_1 \in \mathbb{R}$ و $x_2 \in \mathbb{R}$ بحيث $x_1 < x_2$

اذن: $x_1^3 < x_2^3$ ومنه $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$ أي $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه الدالة f تزايدية على \mathbb{R}



(3)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5

