

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{7} \text{ يعني } 7 \leq y \leq 8$$

$$\text{لدينا } \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \text{ اذن } 1 \times \frac{1}{8} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 2 \times \frac{1}{7} \text{ اذن } \frac{1}{8} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{7}$$

تمرين 7:

$$1. \text{ تحقق من أن: } 14^2 < 200 < 15^2$$

$$\text{ثم استنتج أن: } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$2. \text{ تحقق من أن: } 22^2 < 500 < 23^2$$

$$\text{ثم استنتج أن: } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

$$3. \text{ استنتج تأطيرا للعددين } \sqrt{2} + \sqrt{5} \text{ و } \sqrt{10}.$$

الجواب:

$$(1) \text{ لدينا } 14^2 = 196 \text{ و } 15^2 = 225 \text{ ومنه } 14^2 < 200 < 15^2$$

$$\text{لدينا } 14^2 < 200 < 15^2 \text{ اذن نستنتج أن: } \sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$$

$$\text{اذن: } 14 < \sqrt{2} \times 10 < 15 \text{ أي: } \sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$$

$$\text{أي: } 14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$$

$$\text{اذن نستنتج أن: } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$(2) \text{ لدينا } 22^2 = 484 \text{ و } 23^2 = 529 \text{ ومنه } 22^2 < 500 < 23^2$$

$$\text{لدينا } 22^2 < 500 < 23^2 \text{ اذن نستنتج أن: } \sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$$

$$\text{اذن: } 22 < \sqrt{5} \times 10 < 23 \text{ أي: } \sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2}$$

$$\text{أي: } 22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10}$$

$$\text{اذن نستنتج أن: } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

$$(3) \text{ لدينا } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \text{ و } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

$$\text{اذن: } 1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3 \text{ أي: } 3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$$

$$\text{و أيضا بضرب طرف لطرف نجد: } 1,4 \times 2,2 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1,5 \times 2,3$$

$$\text{أي: } 3,08 < \sqrt{10} < 3,45$$

تمرين 8:

$$(1) \text{ أحسب: } (5 - 3\sqrt{2})^2$$

$$(2) \text{ قارن العددين: } 5 \text{ و } 3\sqrt{2}$$

$$(3) \text{ بسط: } \sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$$

$$(1) \text{ الجواب: } (3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 18 - 30\sqrt{2} + 25$$

$$(3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 43 - 30\sqrt{2}$$

$$(2) \text{ لمقارنة العددين نقارن مربعيهما: } (3\sqrt{2})^2 = 18 \text{ و } (5)^2 = 25$$

$$\text{اذن } 5 > 3\sqrt{2} \text{ ومنه } 5 - 3\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$$

$$(3) \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = \sqrt{(5 - 3\sqrt{2})^2} = |5 - 3\sqrt{2}|$$

$$= 5 - 3\sqrt{2} \text{ لأن } 5 - 3\sqrt{2} \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{وبالتالي: } \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = 5 - 3\sqrt{2}$$

$$\text{تمرين 1: قارن بين } \frac{100}{101} \text{ و } \frac{101}{102}$$

الجواب:

$$\text{نحسب الفرق: } \frac{100}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$$

$$\text{اذن: } \frac{101}{102} \geq \frac{100}{101} \text{ ومنه } \frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{تمرين 2: قارن } a \text{ و } b \text{ و نضع } a = 2 + \sqrt{3} \text{ و } b = 2\sqrt{3}$$

الجواب:

$$\text{لدينا } a - b = 2 - \sqrt{3} \text{ و بما أن } 2 - \sqrt{3} \text{ عدد حقيقي موجب قطعاً}$$

$$\text{أي: } (a - b) \in \mathbb{R}_+^* \text{ فان: } a > b$$

$$\text{تمرين 3: قارن } a \in \mathbb{R} \text{ و } 2a \text{ و } a^2 + 1$$

$$\text{الجواب: } (a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{ومنه } a^2 + 1 \geq 2a \text{ مهما يكن: } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{تمرين 4: قارن } a \in \mathbb{R} \text{ و } 4a \text{ و } 4a^2 + 1$$

$$\text{الجواب: } (4a^2 + 1) - 4a = 4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{ومنه } 4a^2 + 1 \geq 4a \text{ مهما يكن: } a \in \mathbb{R}$$

$$\text{تمرين 5: قارن العددين: } a = \sqrt{6} \text{ و } b = 2\sqrt{3}$$

الجواب:

$$\text{لدينا: } (\sqrt{6})^2 = 6 \text{ و } (2\sqrt{3})^2 = 2^2 \times \sqrt{3}^2 = 4 \times 3 = 12$$

$$\text{ومنه: } a < b$$

$$\text{تمرين 6: لتكن } 1 \leq x \leq 2 \text{ و } 7 \leq y \leq 8$$

$$\text{أعط تأطيرا لكل من } x^2, x - y, -y, x + y, y^2, 2x,$$

$$\frac{x}{y}, \frac{1}{y}, 2x - 3y$$

$$\text{الجواب: } 1 \leq x \leq 2 \text{ و } 7 \leq y \leq 8 \text{ اذن: } 7 + 1 \leq x + y \leq 8 + 2$$

$$8 \leq x + y \leq 10$$

$$-8 \leq -y \leq -7$$

$$x - y = x + (-y)$$

$$\text{لدينا: } 1 \leq x \leq 2 \text{ و } -8 \leq -y \leq -7 \text{ اذن: } -7 \leq x - y \leq -5$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ يعني } 1^2 \leq x^2 \leq 2^2 \text{ يعني } 1 \leq x^2 \leq 4$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ يعني } 7^2 \leq y^2 \leq 8^2 \text{ يعني } 49 \leq y^2 \leq 64$$

$$1 \leq x \leq 2 \text{ يعني } 2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 2 \text{ يعني } 2 \leq 2x \leq 4$$

$$7 \leq y \leq 8 \text{ يعني } 3 \times 7 \leq 3 \times y \leq 3 \times 8 \text{ يعني } 21 \leq 3y \leq 24$$

$$2x - 3y = 2x + (-3y)$$

$$-24 \leq -3y \leq -23 \text{ و } 2 \leq 2x \leq 4$$

$$\text{اذن: } 2 - 24 \leq 2x - 3y \leq 4 - 23$$

$$\text{يعني: } -22 \leq 2x - 3y \leq -19$$

تمرين 9: بعد التمثيل على مستقيم للمجالين I و J حدد اتحاد وتقاطع المجالين I و J في الحالات الآتية

$$I =]-3,7] \quad \text{و} \quad J = [-1,+\infty[$$

$$I =]-\infty,5[\quad \text{و} \quad J = [4;10]$$

$$I = [0,10[\quad \text{و} \quad J = [-5;-1]$$

الجواب:

$$I \cup J =]-3;+\infty[\quad I \cap J =]-1,7]$$

$$I \cup J =]-\infty;10] \quad I \cap J = [4,5[$$

$$I \cup J = [-5;10] \quad I \cap J = \emptyset$$

تمرين 10: نضع $x \in [1;3]$ و $y \in [2;4]$

(1) اعط تأطيرا للأعداد التالية: x^2 و y^2 و $2x$ و $3y$

$$-x \quad \text{و} \quad -y \quad \text{و} \quad \frac{1}{x} \quad \text{و} \quad \frac{1}{y} \quad \text{و} \quad \frac{x}{y}$$

(2) اعط تأطيرا لكل من A و B : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ و $B = \frac{2x-1}{x+1}$

$$B = \frac{2x-1}{x+1}$$

الجواب: (1) $x \in [1;3]$ يعني $1 \leq x \leq 3$

$$y \in [2;4] \quad \text{يعني} \quad 2 \leq y \leq 4$$

$$1 \leq x \leq 3 \quad \text{يعني} \quad 1^2 \leq x^2 \leq 3^2 \quad \text{يعني} \quad 1 \leq x^2 \leq 9$$

$$2 \leq y \leq 4 \quad \text{يعني} \quad 2^2 \leq y^2 \leq 4^2 \quad \text{يعني} \quad 4 \leq y^2 \leq 16$$

$$1 \leq x \leq 3 \quad \text{يعني} \quad 2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 3 \quad \text{يعني} \quad 2 \leq 2x \leq 6$$

$$2 \leq y \leq 4 \quad \text{يعني} \quad 3 \times 2 \leq 3y \leq 3 \times 4 \quad \text{يعني} \quad 6 \leq 3y \leq 12$$

$$1 \leq x \leq 3 \quad \text{يعني} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{يعني} \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$2 \leq y \leq 4 \quad \text{يعني} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{لدينا} \quad \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \quad \text{اذن} \quad 1 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{2} \quad \text{اذن} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ تأطير } A: \quad -12 \leq -3y \leq -6 \quad \text{يعني} \quad 6 \leq 3y \leq 12$$

$$\text{وحسب النتائج السابقة وجمع المتفاوتات طرف لطرف نجد:} \\ 1+4+2-12 \leq x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 9+16+6-6$$

$$\text{وبالتالي:} \quad -5 \leq A \leq 25$$

تأطير B

$$B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$$

$$\text{لدينا} \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \text{يعني} \quad 2 \leq 2x \leq 6 \quad \text{يعني} \quad 2-1 \leq 2x-1 \leq 6-1$$

$$\text{يعني} \quad 1 \leq 2x-1 \leq 5$$

$$\text{لدينا} \quad 1 \leq x \leq 3 \quad \text{يعني} \quad 2 \leq x+1 \leq 4 \quad \text{يعني} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{وبضرب المتفاوتتين التاليتين} \quad 1 \leq 2x-1 \leq 5 \quad \text{و} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$$

طرف لطرف نجد

$$\frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2} \quad \text{يعني} \quad 1 \times \frac{1}{4} \leq (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \leq 5 \times \frac{1}{2}$$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

