

$$\overline{EB}\left(-\frac{3}{2}; 1\right) \text{ و } \overline{AE}(-2; -3)$$

قائم ABE أي $\overline{AE} \perp \overline{EB}$ ومنه $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = 3 - 3 = 0$
الزاوية في النقطة E

(2) **طريقة 1:** نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعيين متتابعين متقايسين

$$\text{لدينا: } \overline{AB}\left(-\frac{7}{2}; -2\right) \text{ و } \overline{DC}\left(-\frac{7}{2}; -2\right) \text{ اذن: } \overline{AB} = \overline{DC}$$

ومنه: $ABCD$ متوازي الأضلاع

$$\text{ولدينا كذلك: } AC = \sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + 4} = \sqrt{\frac{65}{4}}$$

$$\text{و } BC = \sqrt{1+16} = \sqrt{\frac{65}{4}} \text{ اذن: } AB = BC \text{ ومنه: } ABCD \text{ معين}$$

طريقة 2: نبين أن القطرين متعامدين

$$\text{لدينا: } \overline{BD}(3; -2) \text{ و } \overline{AC}(-4; -6)$$

$$\text{اذن: } \overline{AC} \cdot \overline{BD} = -12 + 12 = 0$$

ومنه: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ وبالتالي: $ABCD$ معين

تمرين 6: نعتبر في المستوى المتجهي المتجهتين التاليتين:

$$\vec{v}(-2; 0) \text{ و } \vec{u}(-1; -1)$$

$$(1) \text{ أحسب: } \sin(\widehat{u; v}) \text{ و } \cos(\widehat{u; v})$$

$$(2) \text{ استنتج قياسا للزاوية الموجهة } (\widehat{u; v})$$

الأجوبة:

$$\cos(\widehat{u; v}) = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(\widehat{u; v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (1)$$

$$\sin(\widehat{u; v}) = \frac{-2}{\sqrt{2} \times 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(\widehat{u; v}) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{2} \times 2}$$

$$(2) \text{ لدينا } \sin(\widehat{u; v}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ و } \cos(\widehat{u; v}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

ومنه $\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $(\widehat{u; v})$

تمرين 7: نعتبر في المستوى النقاط التالية:

$$C(1; 3) \text{ و } B(1; 1) \text{ و } A(3; 3)$$

$$(1) \text{ أحسب: } \sin(\widehat{AB; AC}) \text{ و } \cos(\widehat{AB; AC})$$

$$(2) \text{ استنتج قياسا للزاوية الموجهة } (\widehat{AB; AC})$$

$$\cos(\widehat{AB; AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \quad (1) \text{ **الأجوبة:** }$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \text{ ومنه: } \overline{AC}(-2, 0) \text{ و } \overline{AB}(-2, -2)$$

تمرين 1: نعتبر المتجهات

$$\vec{w} = 5\vec{i} + 3\vec{j} \text{ و } \vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} \text{ و } \vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$$

أحسب الجداءات السلمية التالية: $\vec{u} \cdot \vec{v}$ و $\vec{v} \cdot \vec{w}$ و $\vec{u} \cdot \vec{w}$

$$\text{الجواب: } \vec{u} \perp \vec{v} \text{ اذن: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 1 \times 5 + 3 \times 2 = 11 \text{ و } \vec{v} \cdot \vec{w} = 2 \times 5 + 3 \times (-1) = 7$$

تمرين 2: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون

المتجهتان $\vec{v}(2-m; 5)$ و $\vec{u}(3; -1+m)$ متعامدتين

$$\text{الجواب: } \vec{u} \perp \vec{v} \text{ يعني } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ يعني } 3(2-m) + 5 \times (-1+m) = 0$$

$$6 - 3m - 5 + 5m = 0 \text{ يعني } 2m + 1 = 0 \text{ يعني } m = -\frac{1}{2}$$

تمرين 3: حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون

المتجهتان $\vec{v}\left(2-m; \frac{1}{2}\right)$ و $\vec{u}(-1+m; 2)$ متعامدتين

$$\text{الجواب: } \vec{u} \perp \vec{v} \text{ يعني } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ يعني } (-1+m)(2-m) + 2 \times \frac{1}{2} = 0$$

$$-m^2 + 3m - 1 = 0 \text{ يعني } -2 + m + 2m - m^2 + 1 = 0$$

يعني $m^2 - 3m + 1 = 0$ نحسب مميز المعادلة ونجد:

$$\Delta = 9 - 4 = 5 \text{ ومنه للمعادلة حلين هما: } m_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } m_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

تمرين 4: نعتبر في المستوى النقاط التالية:

$$A(-1; 3) \text{ و } B(3; \sqrt{5}) \text{ و } C(2; -3)$$

$$(1) \text{ أحسب } AC \text{ و } \|\vec{u}\| \text{ (2) أحسب: } \overline{AB} \cdot \overline{CB}$$

(3) ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث ABC

الأجوبة:

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-2)^2} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$(2) \overline{AB}(4; \sqrt{5}-3) \text{ يعني } \overline{AB}(3-(-1); \sqrt{5}-3)$$

$$\overline{CB}(1; \sqrt{5}+3) \text{ يعني } \overline{CB}(3-2; \sqrt{5}+3)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 1 \times 4 + (\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3) = 4 + ((\sqrt{5})^2 - 3^2) = 0$$

(3) نستنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية في B

تمرين 5: نعتبر في المستوى النقاط التالية: $A(3; 2)$ و $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

$$\text{و } C(-1; -4) \text{ و } D\left(\frac{5}{2}; -2\right) \text{ و } E(1; -1)$$

(1) بين أن المثلث ABE قائم الزاوية في النقطة E

(2) بين أن الرباعي $ABCD$ معين

(يكفي أن نبين أن $ABCD$ متوازي الأضلاع وضلعيين متتابعين متقايسين أو نبين أن القطرين متعامدين)

الأجوبة: (1) يكفي أن نبين أن $\overline{AE} \perp \overline{EB}$ أي نبين أن $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = 0$

لدينا $\vec{n}(2;-3)$ و $\overline{AM}(x-1,y-2)$

$$(D)/2x-3y+4=0 \Leftrightarrow 2(x-1)-3(y-2)=0 \Leftrightarrow$$

طريقة 2: نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$$(D)/ax+by+c=0 \text{ و } \vec{n}(a;b) \text{ متجهة منظمه عليه}$$

نعلم أن : $\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظمه على (D)

اذن : $a=2; b=-3$ ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x-3y+c=0$

ونعلم أن : $A(1;2) \in (D)$ اذن احداثياته تحقق المعادلة يعني :

$$(D)/2x-3y+4=0 \text{ ومنه } c=4 \text{ يعني } 2 \times 1 - 3 \times 2 + c = 0$$

تمرين 11: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$$A(1;2) \text{ و } B(-2;3) \text{ و } C(0;4)$$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AB]$

2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

الجواب: (1) واسط القطعة $[AB]$ هو مستقيم عمودي

على (AB) ويمر من I منتصف القطعة $[AB]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$$(D)/ax+by+c=0 \text{ و } \overline{AB}(a,b) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

ولدينا : $\overline{AB}(-3,1)$ متجهة منظمه على (D) اذن : $a=-3; b=1$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/-3x+y+c=0$

ونعلم أن : $I \in (D)$ علينا أولاً حساب احداثيات I

$$I\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ يعني } I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

$I \in (D)$ اذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني :

$$(D)/-3x+y-4=0 \text{ ومنه } c=-4 \Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + c = 0 \Leftrightarrow -3\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} + c = 0$$

(2) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة A

يعني (Δ) عمودي على (BC) ويمر من A

ومنه : $\overline{BC}(2,1)$ متجهة منظمه على (Δ)

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$$(D)/ax+by+c=0 \text{ و } \overline{BC}(a,b) \text{ متجهة منظمه على } (\Delta)$$

اذن : $a=2; b=1$ ومنه المعادلة تصبح : $(\Delta)/2x+y+c=0$

ونعلم أن : $A \in (\Delta)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة يعني :

$$(\Delta)/2x+y-4=0 \text{ ومنه } c=-4 \Leftrightarrow 2 \times 1 + 2 + c = 0$$

تمرين 12: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$$A(1;1) \text{ و } B(-2;0) \text{ و } C(3;5)$$

1. حدد معادلة المستقيم (D) واسط القطعة $[AC]$

2. حدد معادلة (Δ) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

الجواب: (1) واسط القطعة $[AC]$ هو مستقيم عمودي

على (AC) ويمر من I منتصف القطعة $[AC]$

نعلم أن معادلة مستقيم تكتب على الشكل :

$$(D)/ax+by+c=0 \text{ و } \overline{AC}(a,b) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

ولدينا : $\overline{AC}(2,4)$ متجهة منظمه على (D) اذن : $a=2; b=4$

ومنه المعادلة تصبح : $(D)/2x+4y+c=0$

ونعلم أن : $I \in (D)$ علينا أولاً حساب احداثيات I

$$\cos(\widehat{AB;AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\|} = \frac{4}{\sqrt{8} \times \sqrt{4}} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\widehat{AB;AC}) = \frac{-4}{2\sqrt{2} \times 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(\widehat{AB;AC}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} / (2\sqrt{2} \times 2)$$

$$\cos(\widehat{AB;AC}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \text{ لدينا } (2)$$

$$\sin(\widehat{AB;AC}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin \frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ و}$$

ومنه $-\frac{\pi}{4}$ هو قياس للزاوية الموجهة $\widehat{AB;AC}$

تمرين 8: نعتبر في المستوى النقط التالية :

$$A(4;1) \text{ و } B(0;5) \text{ و } C(-2;-1)$$

(1) أحسب المسافات : AB و AC و BC

ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

(2) أحسب : $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

(3) استنتج أن : $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(4) أحسب $\det(\overline{AB;AC})$ و استنتج أن : $\sin(\widehat{BAC}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

الأجوبة:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad (1)$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

ومنه : $AC = BC$ ومنه ABC متساوي الساقين

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24 - 8 = 16 \text{ ومنه } \overline{AC}(-6,-2) \text{ و } \overline{AB}(-4,4) \quad (2)$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\|\overline{AB}\| \times \|\overline{AC}\|} = \frac{16}{\sqrt{32} \times \sqrt{40}} = \frac{16}{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{20}}{20} = \frac{\sqrt{20}}{10} \quad (3)$$

$$\det(\overline{AB;AC}) = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 32 \quad (4)$$

$$\sin(\widehat{AB;AC}) = \frac{32}{8\sqrt{20}} = \frac{32\sqrt{20}}{160} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \sin(\widehat{AB;AC}) = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} / (8\sqrt{20})$$

تمرين 9: أعط متجهة منظمه على المستقيم (D) في كل حالة من

الحالات التالية :

$$(1) (D): x - 1 = 0 \quad (2) (D): x - 2y + 5 = 0$$

$$(3) (D): 2y - 3 = 0$$

الأجوبة: متجهة منظمه على المستقيم (D) $ax+by+c=0$

هي : $\vec{n}(a;b)$

$$(1) (D): x - 2y + 5 = 0 \quad \vec{n}(2;1) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

$$(2) (D): 0x + 2y - 3 = 0 \quad \vec{n}(-2;0) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

$$(3) (D): 1x + 0y - 1 = 0 \quad \vec{n}(0;1) \text{ متجهة منظمه على } (D)$$

تمرين 10: حدد معادلة المستقيم (D) المار من النقطة $A(1;2)$ و

$\vec{n}(2;-3)$ متجهة منظمه عليه

الجواب: (هناك طريقتين يمكن استعمالهما)

$$\text{طريقة 1: } \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \overline{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow M(x;y) \in (D)$$

$$y=1 \Leftrightarrow 5y=5 \Leftrightarrow 2x+4y-2x+y=6-1 \Leftrightarrow$$

$$H(1;1) \text{ ومنه } x=1 \Leftrightarrow x+2=3 \Leftrightarrow x+2y=3 : \text{ ومنه } H(1;1)$$

تمرين 16: نعتبر في المستوى النقطتين : $A(-1;-3)$ و $B(3;2)$

(1) حدد معادلة للمستقيم (AB)

(2) أحسب مسافة النقطة O عن المستقيم (AB)

(3) استنتج مساحة المثلث OAB

(4) حدد زوج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AB)

أجوبة: (1) نحدد أولاً معادلة ديكارتية للمستقيم (AB) :

$$\overline{AB}(4,5) \text{ متجهة موجهة لـ } (AB) \quad \overline{AB}(-b,a) \text{ إذن:}$$

$$a=5; b=-4$$

$$\text{ومنه: } (AB)/5x-4y+c=0$$

$$\text{ولدينا } A \in (AB) \text{ إذن: } 5 \times (-1) - 4 \times (-3) + c = 0 \text{ يعني } c = -7$$

$$\text{ومنه: } (AB)/5x-4y-7=0$$

(2) لدينا $O(0,0)$ إذن:

$$d(O;(AB)) = \frac{|5 \times 0 - 4 \times 0 - 7|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{41}} = \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{7\sqrt{41}}{41}$$

(3) لدينا $d(O;(AB)) = OH$ إذن:

$$S_{ABC} = \frac{AB \times OH}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + (-5)^2}}{2} \times \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{\sqrt{41}}{2} \times \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{7}{2}$$

(4) نحدد أولاً معادلة ديكارتية للمستقيم (OH) :

$$\overline{AB}(4,5) \text{ متجهة منظمية على } (OH)$$

$$\text{إذن: } (OH)/4x+5y+c=0$$

$$\text{ولدينا } O \in (OH) \text{ إذن: } 4 \times 0 + 5 \times 0 + c = 0 \text{ يعني } c = 0$$

$$\text{ومنه: } (OH)/4x+5y=0$$

H هي نقطة تقاطع (OH) و (AB) إذن احداثيات H هي حلول النظام:

$$\begin{cases} 4x+5y=0 \\ 5x-4y=7 \end{cases} \text{ نستعمل طريقة المحددات لحل هذه النظامة:}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -41 \neq 0 \text{ هي: (1) محددة النظامة}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}}{-41} = \frac{-35}{-41} = \frac{35}{41} \text{ هو وحيداً:}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{28}{-41} = -\frac{28}{41} \text{ ومنه: } H\left(\frac{35}{41}; -\frac{28}{41}\right)$$

تمرين 17: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها

$$A(-1;-3) \text{ وشعاعها } R = \sqrt{2}$$

$$\text{الجواب: } (C) (x-(-1))^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{2})^2$$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

$$\text{أو النشر فنجد: } (C) x^2 + y^2 + 2x + 6y + 8 = 0$$

تمرين 18: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي مركزها

$$\Omega(-2;1) \text{ وتمر من النقطة } A(1;4)$$

$$I(2,3) \text{ يعني } I\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$$

$I \in (D)$ إذن احداثيات I تحقق المعادلة يعني:

$$c = -16 \Leftrightarrow 2 \times 2 + 4 \times 3 + c = 0$$

$$\text{ومنه: } (D)/2x+4y-16=0$$

(2) ارتفاع المثلث ABC و المار من النقطة C

يعني (Δ) عمودي على (AB) ويمر من C

$$\text{ومنه: } \overline{AB}(-3,-1) \text{ متجهة منظمية على } (\Delta)$$

نعلم أن معادلة مستقيم نكتب على الشكل:

$$(\Delta) ax+by+c=0 \text{ و } \overline{AB}(a,b) \text{ متجهة منظمية على } (\Delta)$$

$$\text{إذن: } a=-3; b=-1 \text{ ومنه المعادلة تصبح: } (\Delta)/-3x-y+c=0$$

ونعلم أن: $C \in (\Delta)$ إذن احداثيات C تحقق المعادلة يعني:

$$(\Delta)/-3x-y+14=0 \text{ ومنه } c=14 \Leftrightarrow -9-5+c=0$$

تمرين 13: نعتبر في المستوى المستقيمين:

$$(D): 2x+3y-1=0 \text{ و } (D'): \frac{3}{2}x-y+4=0$$

هل (D) و (D') متعامدين؟

الجواب: $\vec{n}(2;3)$ متجهة منظمية على (D)

$$\vec{n}'\left(\frac{3}{2}; -1\right) \text{ متجهة منظمية على } (D')$$

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times \frac{3}{2} + 3 \times (-1) = 3 - 3 = 0 \text{ ومنه } \vec{n} \perp \vec{n}'$$

وبالتالي: $(D) \perp (D')$

تمرين 14: حدد مسافة النقطة $A(1;4)$ و $(D): x-y+2=0$

عن المستقيم (D)

$$\text{الجواب: } d(A;(D)) = \frac{|1-4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرين 15: نعتبر في المستوى النقطة: $A(-1;-3)$ و المستقيم (D)

$$\text{الذي معادلته: } x+2y-3=0$$

(1) أحسب مسافة النقطة A عن المستقيم (D)

(2) حدد زوج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D)

$$\text{الجواب: (1) } d(A;(D)) = \frac{|-1-6-3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

(2) نحدد أولاً معادلة ديكارتية للمستقيم (AH) :

$$\overline{AH}(-2,1) \text{ متجهة موجهة لـ } (AH) \text{ و } x+2y-3=0$$

إذن $(AH)/-2x+1y+c=0$

$$\text{ولدينا } A \in (AH) \text{ إذن: } (-2) \times (-1) - 3 + c = 0 \text{ يعني } c = 1$$

$$\text{ومنه: } (AH)/-2x+1y+1=0$$

H هي نقطة تقاطع (AH) و (D) إذن احداثيات H هي حلول

النظامة:

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ -2x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3=0 \\ -2x+y+1=0 \end{cases} \text{ نضرب المعادلة الأولى في } (-2)$$

$$\text{ونجد: } \begin{cases} x+2y=3 \\ -2x+y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=6 \\ -2x+y=-1 \end{cases} \text{ ونجمع المعادلتين ونجد: } x+2y=3$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$a = -6; b = 2; c = 10 \quad (2)$$

$$a^2 + b^2 - 4c = (-6)^2 + 2^2 - 4 \times (10) = 36 + 4 - 40 = 0$$

ومنه: (E) هي عبارة عن النقطة: $\Omega(3; -1)$

$$a = -4; b = 0; c = 5 \quad (3)$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 16 - 20 = -4 < 0$$

ومنه: (E) هي المجموعة الفارغة

تمرين 23: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x; y)$ من

$$(E): x^2 + y^2 + 5x - 3y + \frac{11}{2} = 0$$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 5^2 + (-3)^2 - 4 \times \left(\frac{11}{2}\right) = 25 + 9 - 22 = 12 > 0$$

ومنه: (E) دائرة مركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$ أي $\Omega\left(-\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

تمرين 24: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى

التي تحقق:

$$1. (E) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$2. (E) \quad x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

$$3. (E) \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7 = 0$$

$$4. (E) \quad x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$$

الأجوبة: $(1) \quad x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$

ومنه: (E) دائرة مركزها $O(0; 0)$ وشعاعها: $R = 1$

$$(2) \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 3^2 - 3^2 - 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4 = (2)^2$$

ومنه: (E) دائرة مركزها $\Omega(1; 3)$ وشعاعها: $R = 2$

$$(3) \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 4 + 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = -2$$

ومنه: (E) هي المجموعة الفارغة

$$(4) \quad (x-0)^2 + y^2 + 2 \times 4 \times y + 4^2 - 4^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y+4)^2 = 4 = (2)^2$$

ومنه: (E) دائرة مركزها $\Omega(0; -4)$ وشعاعها: $R = 2$

تمرين 25: حل مبيانيا المتراجحتين التاليتين:

$$(1) \quad x^2 + y^2 - 1 > 0 \quad (2) \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 < 0$$

الأجوبة: (1)

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 < 9 = (3)^2$$

ومنه: (E) هو داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(1; -2)$ وشعاعها

$$R = 3$$

الجواب: شعاع هذه الدائرة هو: $R = \Omega A$

$$R = \Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

ومنه معادلة الدائرة هي: $(C) \quad (x - (-2))^2 + (y - 1)^2 = (3\sqrt{2})^2$

يمكننا الاكتفاء بهذه الكتابة

أو النشر فنجد: $(C) \quad x^2 + y^2 + 4x - 2y - 13 = 0$

ونكتب على الشكل: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

تمرين 19: حدد معادلة ديكارتية للدائرة (C)

التي أحد أقطارها $[AB]$ حيث $A(1; 3)$ و $B(-1; 1)$

الجواب: شعاع هذه الدائرة هو: $R = \frac{AB}{2}$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

مركز الدائرة (C) هو: منتصف القطعة $[AB]$

$$I(0, 2) \text{ يعني } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

ومنه معادلة الدائرة هي: $(C) \quad (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{2})^2$

يعني: $(C) \quad x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$

تمرين 20: حدد تمثيلا بارامتريا للدائرة (C)

التي مركزها $\Omega(1; -2)$ وشعاعها $R = \sqrt{2}$

الجواب: تمثيل بارامترى للدائرة (C) هو:

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

تمرين 21: حدد مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى التي تحقق

النظمة

$$(\theta \in \mathbb{R}) \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3 = \sqrt{3} \cos \theta \\ y - 1 = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 3((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow$$

ومنه: مجموعة النقط $M(x; y)$ هي الدائرة (C)

التي مركزها $\Omega(3; 1)$ وشعاعها $R = \sqrt{3}$

تمرين 22: حدد طبيعة (E) مجموعة النقط $M(x; y)$ من

المستوى التي تحقق:

$$(E): x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0 \quad (1)$$

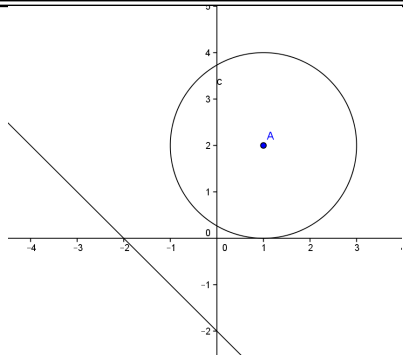
$$(E): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0 \quad (2)$$

$$(E): x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0 \quad (3)$$

الأجوبة: (1)

$$a^2 + b^2 - 4c = (-1)^2 + 3^2 - 4 \times (-4) = 1 + 9 + 16 = 26 > 0$$

ومنه: (E) دائرة مركزها $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$ أي $\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$



تمرين 28: نعتبر الدائرة (C) التي مركزها

$\Omega(1;2)$ وشعاعها $R = 2$ والمستقيم (D) الذي معادلته :

$$(D): x - y + 2 = 0$$

1) بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب (1): نحسب $d(\Omega, (P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

2) معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2$

نحل اذن النظام التالية :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2+(y-2)^2=(2)^2 \\ (2)x-y+2=0 \end{cases}$$

(2) $x+2=y \Leftrightarrow x+2=y$ نعوض في المعادلة (1) فنجد :

$$(x-1)^2+(x+2)^2=4 \text{ يعني } (1)(x-1)^2+(x+2-2)^2=(2)^2$$

$$\text{يعني } x^2-2x+1+x^2=4: \text{ يعني } 2x^2-2x-3=0$$

نحسب مميز المعادلة فنجد : $\Delta = 28$ ومنه للمعادلة حلين هما :

$$x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4} \text{ و } x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4} \text{ يعني } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$$

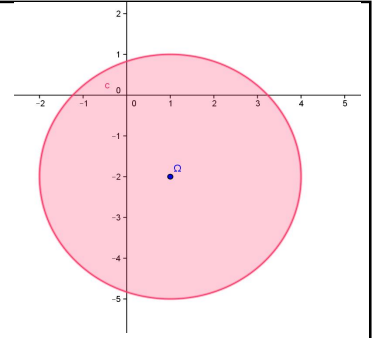
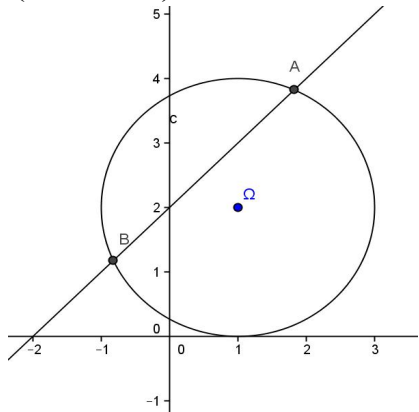
$$\text{اذا كانت } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ نعوض في } x+2=y$$

$$\text{فنجد : } y = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{اذا كانت } x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \text{ نعوض في } x+2=y$$

$$\text{فنجد : } y = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

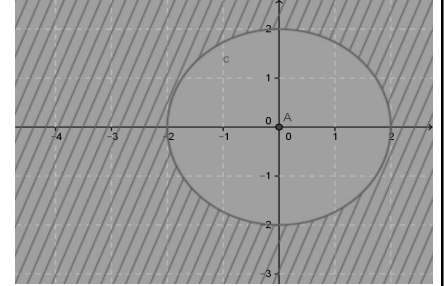
$$\text{ومنه نقطتا التقاطع هما : } A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right) \text{ و } B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$



$$(x-0)^2+(y-0)^2 > 2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 > 4 \Leftrightarrow x^2+y^2-4 > 0 \quad (2)$$

ومنه : (E) هو خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها :

$$R = 2$$



تمرين 26: حل مبيانيا النظام التالية:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 12 < 0 \end{cases}$$

الجواب :

$$(أ) \quad x^2-4x+4-4+y^2-12 < 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-12 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-0)^2 < 16 = (4)^2$$

وهذا يعني داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها : $R = 4$

$$(ب) \quad (x-0)^2+(y-0)^2 > 1^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 > 1 \Leftrightarrow x^2+y^2-1 > 0$$

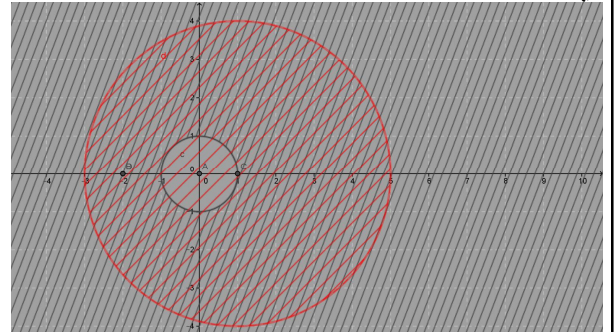
يعني خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R = 1$

مجموعة حلول النظام (E) هي أزواج احداثيات نقط المستوى التي

تنتمي الى تقاطع داخل الدائرة التي مركزها $\Omega(2;0)$ وشعاعها :

$R = 4$ و خارج الدائرة التي مركزها $O(0;0)$ وشعاعها : $R = 1$

أي الجزء من المستوى المخدش باللونين معا



تمرين 27: أدرس الوضع النسبي للدائرة (C) التي مركزها

$\Omega(1;2)$ وشعاعها $R = 2$ مع المستقيم (D) الذي معادلته :

$$(D): x + y + 2 = 0$$

الجواب: نحسب $d(\Omega, (P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R = 2$$

ومنه : المستقيم (D) لا يقطع الدائرة (C)

تمرين 29: نعتبر للدائرة (C) التي مركزها $\Omega(1;2)$ وشعاعها

$R=1$ والمستقيم (D) الذي معادلته :

(1) بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

(2) حدد احداثيات نقطة التماس T

الجواب: (1) نحسب $d(\Omega, (P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

(D): $0x+1y-3=0$ يعني (D): $y=3$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

(2) معادلة الدائرة هي : $(x-1)^2+(y-2)^2=1^2$

نحل اذن النظام التالي :

$$\begin{cases} (1) (x-1)^2+(y-2)^2=1 \\ (2) y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

نعوض في المعادلة (1) $y=3$ فنجد :

$$(x-1)^2+1=1 \text{ يعني } (x-1)^2=0 \text{ يعني } x=1$$

ومنه نقطة التماس هي : $T(1;3)$

تمرين 30: نعتبر الدائرة (C) التي مركزها

$\Omega(2;1)$ وشعاعها $R=5$ والمستقيم (D) الذي معادلته :

$$(D): 3x+y-2=0$$

(1) بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

(2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) والمستقيم (D)

الجواب: (1) نحسب $d(\Omega, (P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|6+1-2|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} < R=5$$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

(2) معادلة الدائرة هي : $(x-2)^2+(y-1)^2=(5)^2$ تكافئ:

$$x^2+y^2-4x-2y-20=0$$

نحدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) والمستقيم (D)

نحل اذن النظام التالي :

$$\begin{cases} (1) x^2-x-2=0 \\ (2) y=-3x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) x^2+y^2-4x-2y-20=0 \\ (2) 3x+y-2=0 \end{cases}$$

نحسب مميز المعادلة (1) فنجد : $\Delta=9$ ومنه للمعادلة

$$x_2=-1 \text{ و } x_1=\frac{1+3}{2}=2$$

• اذا كانت $x_1=2$ فان $y=-4$

• اذا كانت $x_1=-1$ فان $y=5$

ومنه نقطتا التقاطع هما : $A(-1;5)$ و $A(2;-4)$

تمرين 31: نعتبر الدائرة (C)

التي معادلتها : $(1) x^2+y^2-2x-8y+1=0$

و المستقيم (D) المعروف بتمثيله البارامتري :

$$(D): \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

(1) بين أن المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

(2) حدد احداثيات نقط تقاطع الدائرة (C) والمستقيم (D)

الجواب: (1) نعوض في المعادلة (1) فنجد :

$$5t^2-8t=0 \text{ يعني } (1+2t)^2+t^2-2(1+2t)-8+1=0$$

$$t(5t-8)=0 \text{ يعني}$$

$$\text{يعني : } t_1=0 \text{ أو } t_2=\frac{8}{5}$$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

(2) اذا كانت $t_1=0$ نعوض في $\begin{cases} x=1+2t \\ y=t \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$:

$$\text{اذا كانت } t_2=\frac{8}{5} \text{ نعوض فنجد } \begin{cases} x=\frac{21}{5} \\ y=\frac{8}{5} \end{cases}$$

ومنه : المستقيم (D) يقطع الدائرة (C) في نقطتين مختلفتين

و نقطتا التقاطع هما : $A(1;0)$ و $B(\frac{21}{5}; \frac{8}{5})$

تمرين 32: لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتيية هي :

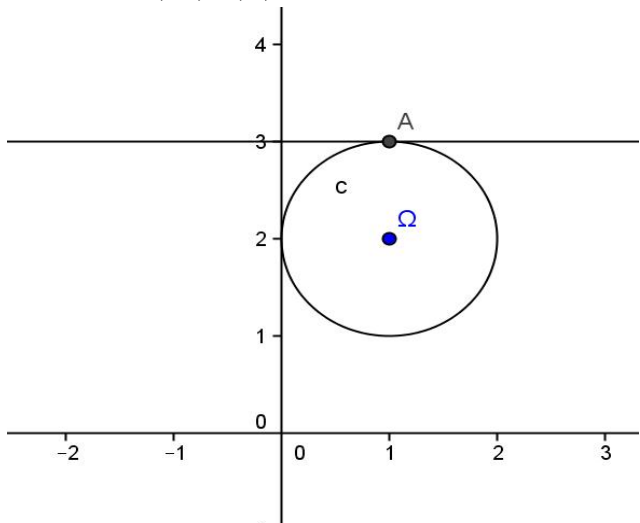
$$(1) x^2+y^2-4x-2y+1=0$$

(1) تأكد أن $A(0;1) \in (C)$ ثم حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

(2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A

الجواب: (1) نتحقق أن احداثيات $A(0;1)$ تحقق المعادلة (1)

$$A(0;1) \in (C) \text{ ومنه } (1) 0^2+1^2-4 \times 0-2 \times 1+1=0$$



$$a=4; b=-2; c=1$$

$$\text{نحسب : } a^2+b^2-4c=(4)^2+(-2)^2-4 \times 1=16+4-4=16 > 0$$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$ أي $\Omega(-2;1)$

$$\text{وشعاعها : } R = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

(2) معادلة لمماس للدائرة (C) في النقطة A

ولدينا : $\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$

$$\overline{A\Omega}(-2;0)$$

$$-2(x-0)=0 \Leftrightarrow -2(x-0)+0(y-1)=0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$x=0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

ومنه معادلة مماس الدائرة (C) في النقطة $A(0;1)$ هو المستقيم

الذي معادلته : $(D): x=0$

تمرين 33: لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$x^2 + y^2 + 4x + 4y - 2 = 0$$

و المستقيم (D) الذي معادلته : $x + 3y - 2 = 0$

(1) حدد مركز وشعاع الدائرة (C)

(2) بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

(3) حدد إحداثيتي نقطه تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب: (1) نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)

$$a = 4; b = 4; c = -2$$

$$\text{نحسب : } a^2 + b^2 - 4c = (4)^2 + (4)^2 - 4 \times -2 = 16 + 16 + 8 = 40 > 0$$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$ أي $\Omega(-2; -2)$

$$\text{وشعاعها : } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10}$$

(2) نحسب $d(\Omega, (D))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega, (D)) = \frac{|-2 - 6 - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} = R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

(3) نحدد احداثيات نقطة التماس T

$$\text{معادلة الدائرة هي : } (x+2)^2 + (y+2)^2 = 10$$

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases} (1) (x+2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ (2) x = 2 - 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) (x+2)^2 + (y+2)^2 = 10 \\ (2) x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $x = 2 - 3y$ فنجد $y^2 - 2y + 1 = 0$

يعني : $(y-1)^2 = 0$ يعني $y = 1$ ومنه : $x = -1$

ومنه نقطة التماس هي : $T(-1; 1)$

**« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant
régulièrement aux calculs et
exercices que l'on devient un
mathématicien**

