تمرين1: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=5x^2$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=1$

الجواب : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5(x^2-1^2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}5(x+1)=5\times2=10$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

و هو العدد المشتق عند $x_0=1$: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=10=f'(1)$

تمرين2: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2+1$

باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=3$

الجواب : $f(3)=2\times3^2+1=2\times9+1=19$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+1-19}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-18}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2(x^2-9)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2(x^2-3^2)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}2(x+3)=2(3+3)=12$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=3$

و هو العدد المشتق عند $x_0=3$: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=12=f'(3)$

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=3x^2$

1) باستعمال التعريف أدرس اشتقاق الدالة f عند $x_0=2$

2) حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب (1: $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-12}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3(x^2-4)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3(x^2-2^2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}3(x+2)=3\times4=12$

ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=2$

و هو العدد المشتق عند $x_0=2$: $f'(2)=12$

(2 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=12+12(x-2)$

$\Leftrightarrow y=12+12x-24\Leftrightarrow y=12x-12$

تمرين3: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

الجواب (1: $f(2)=2^2-2\times2+1=1$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x+1-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}x=2$ ومنه f قابلة للاشتقاق عند : $x_0=1$

و هو العدد المشتق عند $x_0=2$: $2=f'(2)$

(2 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(2)+f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y=1+2(x-2)\Leftrightarrow y=2x-3$

تمرين4: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=2$ (2 $f(x)=3x-5$ (3 $f(x)=x^{10}$

4) $f(x)=2x^5$ (5 $f(x)=4x^3-\dfrac{1}{2}x^2-1$

6) $f(x)=3x^2-6x-1$

7) $f(x)=(3x-5)\times(2x+1)$

8) $f(x)=6\sqrt{x}-4$ (9 $f(x)=\dfrac{1}{5x-4}$

10) $f(x)=\dfrac{3x-2}{2x-1}$ (11 $f(x)=(2x-1)^7$

12) $f(x)=\dfrac{5}{x}$

الأجوبة :

1) $f'(x)=(2)'=0$ (2 $f'(x)=(3x-5)'=3$

3) $f'(x)=(x^{10})'=10x^{10-1}=10x^9$

4) $f'(x)=(2x^5)'=2\times5x^{5-1}=10x^4$

5) $f'(x)=\left(4x^3-\dfrac{1}{2}x^2-1\right)'=4\times3x^{3-1}-\dfrac{1}{2}\times2x-0=12x^2-x$

6) $f'(x)=(3x^2-6x-1)'=3\times2x^{2-1}-6-0=6x-6$

7) نستعمل القاعدة التالية : $(u+v)'=u'\times v+u\times v'$

$f'(x)=((3x-5)\times(2x+1))'=(3x-5)'(2x+1)+(3x-5)(2x+1)'$

$f'(x)=3(2x+1)+2(3x-5)=6x+3+6x-10=12x-7$

8) $f'(x)=(6\sqrt{x}-4)'=6\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-0=\dfrac{3}{\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}}{x}$

9) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x-4}\right)'=-\frac{(5x-4)'}{(5x-4)^2}=-\frac{5}{(5x-4)^2}$$

10) $f(x)=\frac{3x-2}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-2}{2x-1}\right)'=\frac{(3x-2)'(2x-1)-(3x-2)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{3(2x-1)-2\times(3x-2)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x-3-6x+4}{(2x-1)^2}=\frac{1}{(2x-1)^2}$$

11) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=7\times2\times(2x-1)^{7-1}=14(2x-1)^6$$

12) $$f'(x)=\left(\frac{5}{x}\right)'=\left(5\times\frac{1}{x}\right)'=5\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-5}{x^2}$$

تمرين5: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية

1) $f(x)=10$ 2) $f(x)=6x+\frac{1}{2}$ 3) $f(x)=x^5$

4) $f(x)=6x^3$ 5) $f(x)=5x^2-3x+4$

6) $f(x)=x^2-3x+8$ 7) $f(x)=(4x-1)\times(3x+5)$

8) $f(x)=2\sqrt{x}+1$ 9) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

10) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ 11) $f(x)=(3x+4)^3$

12) $f(x)=\frac{-3}{x}$

الأجوبة: 1) $f'(x)=(10)'=0$ 2) $f'(x)=\left(6x+\frac{1}{2}\right)'=6$

3) $f'(x)=(x^5)'=5x^{5-1}=5x^4$

4) $f'(x)=(6x^3)'=6\times3x^{3-1}=18x^2$

5) $f'(x)=(5x^2-3x+4)'=5\times2x^{2-1}-3-0=10x-3$

6) $f'(x)=(x^2-3x+8)'=2x^{2-1}-3+0=2x-3$

7) نستعمل القاعدة التالية : $(u+v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left((4x-1)\times(3x+5)\right)'=(4x-1)'(3x+5)+(4x-1)(3x+5)'$$

$$f'(x)=4(3x+5)+3(4x-1)=12x+20+12x-3=24x+17$$

8) $$f'(x)=(2\sqrt{x}+1)'=2\times\frac{1}{2\sqrt{x}}+0=\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$$

9) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2x+1}\right)'=-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2}=-\frac{2}{(2x+1)^2}$$

10) $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

11) $f(x)=(3x+4)^3$ نستعمل القاعدة التالية : $(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

12) $$f'(x)=\left(\frac{-3}{x}\right)'=\left(-3\times\frac{1}{x}\right)'=-3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{3}{x^2}$$

الدالة f	الدالة المشتقة f'
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$ $n\in\mathbb{Z}^*$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=k.u$	$f'(x)=k.u'$
$f(x)=u\times v$	$f'(x)=u'\times v+u\times v'$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^n\times u'$
$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

تمرين6: حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=11$ 2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=2x^3$

4) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 5) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6$

6) $f(x)=\frac{3}{x}$ 7) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 8) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ 10) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

11) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 12) $f(x)=(2x-1)^7$

الأجوبة: 1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=(2x^3)'=2\times3x^{3-1}=6x^2$

4) $$f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$$

5) $f'(x)=\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-4x-6\right)'=\frac{1}{5}\times5x^{5-1}-\frac{1}{4}\times4x^3-4+0=x^4-x^3-4$

6) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

7) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

8) نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{5x+7}\right)'=-\frac{(5x+7)'}{(5x+7)^2}=-\frac{5}{(5x+7)^2}$$

9) $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{\left(x^2+8x\right)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

10) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'\left(x^3+1\right)-7x\left(x^3+1\right)'}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{7\left(x^3+1\right)-7x\times3x^2}{\left(x^3+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{\left(x^3+1\right)^2}=\frac{7-14x^3}{\left(x^3+1\right)^2}$$

11) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

12) $f(x)=(2x-1)^7$ نستعمل القاعدة التالية : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x-1)^7\right)'=7\times(2x-1)^{7-1}\times(2x-1)'=14(2x-1)^6$$

تمرين7:

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2+2x-2$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أدرس تغيرات 4) حدد جدول تغيرات f

الأجوبة: 1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2+2x-2=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2+2x-2=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(x^2+2x-2\right)'=2x+2$

$f'(x)=0$ يعني $2x+2=0$ يعني $x=-1$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$

اذا كانت: $x\in[-1;+\infty[$ فان : $f'(x)\geq0$ ومنه f تزايديه

اذا كانت: $x\in]-\infty;-1]$ فان : $f'(x)\leq0$ ومنه f تناقصية

4) نلخص النتائج في جدول يسمى جدول التغيرات :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-3	↗ $+\infty$

تمرين8:

حدد مطاريف الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-6x+1$

الجواب : $D_f=\mathbb{R}$ و $f'(x)=\left(x^2-6x+1\right)'=2x-6$

$f'(x)=0$ يعني $2x-6=0$ يعني $x=3$

ندرس اشارة : $f'(x)$ ونحدد جدول التغيرات

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-8	↗ $+\infty$

f' تنعدم في 3 و تتغير إشارتها اذن $f(3)=-8$ *مطرا ف للدالة* f

وبالضبط قيمة دنيا للدالة f

تمرين9:

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^2+x+1$

1) حدد D_f 2) أحسب نهايات f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5) حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6) حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7) حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) *أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم*

الجواب: $f(x)=2x^2+x+1$

1) الدالة f حدودية اذن $D_f=\mathbb{R}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x^2+x+1=\lim_{x\to-\infty} 2x^2=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x^2+x+1=\lim_{x\to+\infty} 2x^2=+\infty$

3) $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)=\left(2x^2+x+1\right)'=4x+1$

$f'(x)=0$ يعني $4x+1=0$ يعني $x=-\frac{1}{4}$

ندرس اشارة : $f'(x)$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$4x+1$	$-$	0	$+$

4) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{7}{8}$	↗ $+\infty$

5) $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=5x-21 \Leftrightarrow y=4+5(x-5) \Leftrightarrow y=f(1)+f'(1)(x-1)$

لأن : $f(1)=4$ و $f'(1)=5$

6) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $2x^2+x+1=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=2$ و $b=1$ و $c=1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times2=-7<0$

ومنه هذه المعادلة ليس لها حل: وبالتلي التمثيل المبياني لا يقطع محور الأفاصيل

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

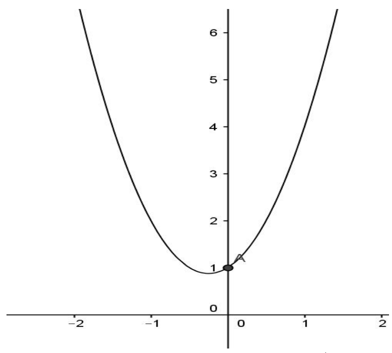
نحسب فقط : $f(0)$

$f(0)=1$ ومنه نقطة التقاطع هي: $A(0;1)$

7)الدالة تقبل قيمة دنيا هي : $\frac{7}{8}$

8)رسم: C_f

2-	-1	-1/4	0	1	2
7	2	7/8	1	4	11



ملاحظة : بالنسبة ل $f(x)=-x^2+2x+3$ وتحديد نقط التقاطع مع محور الأفاصيل نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني

$-x^2+2x+3=0$

نحل المعادلة باستعمال المميز

$a=-1$ و $b=2$ و $c=3$

$\Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times3\times(-1)=16=(4)^2>0$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(2)+\sqrt{16}}{-2}=-1$ و $x_2=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$

ومنه نقط التقاطع هما: $A(-1;0)$ أو $B(3;0)$

تمرين10:للبحث

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$f(x)=-x^2+2x+3$ أو $f(x)=-x^2+x$

1)حدد D_f (2 أحسب نهايات f عند محدات D_f

3)أحسب مشتقة الدالة f و أدرس اشارتها 4) حدد جدول تغيرات f

5)حدد معادلة لمماس منحى الدالة f في النقطة الذي أفصولها $x_0=1$

6)حدد نقط تقاطع (C_f) مع محوري المعلم

7)حدد مطاريف الدالة f ان وجدت

8) أرسم (C_f) في معلم متعامد ممنظم

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien