نتائج هامة

A- الجبر

1- متطابقات هامة: ليكن : $n\in \mathbb{N}^*$ و $c\in IR$ و $b\in IR$ و $a\in IR$. لدينا:

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \qquad a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+......+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$a^4-b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

2- المعدلات:

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا.

الأعداد: $m_1 = \dfrac{2ab}{a+b}$ و $m_2 = \sqrt{ab}$ و $m_3 = \dfrac{a+b}{2}$ و $m_4 = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

هي على التوالي المعدل التوافقي والهندسي والحسابي والتربيعي للعددين a و b.

نتيجة:

$$Inf(a,b) \le m_1 \le m_2 \le m_3 \le m_4 \le Sup(a,b)$$

وتكون المتفاوتات السابقة قطعية إذا وفقط إذا كان $a\neq b$.

3- المتفاوتات:

أ- المتفاوتة المثلثية:

ليكن a و b عددين حقيقيين, إن:

$$\big||a|-|b|\big| \le |a+b| \le |a|+|b|.$$

ب- متفاوتة كوشي شوارتز:

x_1 و x_2 و x_3 و y_1 و y_2 و y_3 , أعداد حقيقية إن:

$$|x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3| \le \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}$$

حالة: $x_3=y_3=0$ $\qquad |x_1y_1+x_2y_2| \le \sqrt{x_1^2+x_2^2}\sqrt{y_1^2+y_2^2}$

ج- متفاوتة تشيبتشيف:

x_1 و x_2 و x_3 و y_1 و y_2 و y_3 , أعداد حقيقية بحيث:

$y_1\le y_2\le y_3$ و $x_1\le x_2\le x_3$.

إن: $(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3) \le 3(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)$

عامة:

ليكن: x_1 و x_2 و... x_n و y_1 و y_2 و... y_n , أعداد حقيقية تحقق:

و $x_1 \le x_2 \le x_3 \ldots \le x_n$ $y_1 \le y_2 \le \ldots \le y_n$.

إن: $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) \le n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots\ldots x_n y_n)$

د- الجزء الصحيح:

خاصية + تعريف:

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي وحيد p بحيث:

$p \le x < p+1$ **الذي يسمى الجزء الصحيح للعدد x ونكتب** $[x] = p$ أو $E(x) = p$.

نتائج:

a- لكل $p \in \mathbb{Z}$ **لدينا:** $E(p) = p$.

b- لكل $x \in \mathbb{R}$ **لدينا:** $E(x) \le x < E(x)+1$.

c- ليكن $x \in IR$ **و** $p \in \mathbb{Z}$ **لدينا:**

$E(x) = p$ **تكافئ أنه يوجد** $r \in [0,1[$ **بحيث:** $x = p + r$.

d- لكل $x \in IR$ **و** $p \in \mathbb{Z}$ **لدينا** $E(x+p) = E(x) + p$.

B- الهندسة الأقليدية:

1- قطاع زاوي:

نتيجة 1: **مساحة قطاع زاوي محصور بقوس في دائرة شعاعها r وزاوية قياسها** α **بالدرجة هي:**

$$S = \frac{\alpha \pi r^2}{360}$$

نتيجة 2: **طول قوس محصور بقطاع زاوي شعاع دائرته r وقياس زاويته هو** α **بالدرجة هو:** $I = \frac{\alpha \pi r}{180}$

2- الرباعيات الدائرية:

نتيجة 1: **يكون رباعي محدب ABCD دائري إذا وفقط إذا كان:** $\hat{D}CB + \hat{D}AB = 180^\circ$ أو $\hat{A}DC + \hat{A}BC = 180^\circ$

نتيجة 2: **يكون رباعي متصالب ABCD دائري إذا وفقط إذا كان:** $\hat{B}AD = \hat{B}CD$ أو $\hat{A}BC = \hat{A}DC$.

3- الزاوية المحيطية والمركزية:

في دائرة ذات المركز نقطة O. نعتبر زاوية مركزية تحصر وترا $[AB]$ **وزاوية محيطية** $[\hat{A}MB]$ **تحصر**

نفس الوتر $[AB]$ **و C نقطة تقاطع واسط القطعة** $[AB]$ **والمماس للدائرة في A.**

نتيجة:

لدينا: $\hat{A}OB = 2\hat{A}MB = 2\hat{C}AB$.

4- خاصيات المثلث:

ABC مثلث. نضع: $AB = c$ و $AC = a$ و $BC = a$ و $P = \frac{a+b+c}{2}$

أ- مبرهنة الكاشي: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

استنتاج:

a- مبرهنة فيتاغورس: **يكون ABC قائم الزاوية في A إذا وفقط إذا كان** $a^2 = b^2 + c^2$

b- مبرهنة المتوسط: نعتبر في المثلث ABC المتوسط $[AA']$ ونضع: $m = AA'$

نتيجة: $b^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{a^2}{2}$

استنتاج: يكون ABC قائم الزاوية في A إذا وفقط إذا كان: $m = \frac{a}{2}$

ج- نفترض أن ABC قائم الزاوية في A.

ليكن $[AH]$ هو الارتفاع المنشأ من A نضع $AH = h$.

نتيجة: $h = \frac{bc}{a}$

د- مساحة المثلث:

لتكن S هي مساحة المثلث ABC و r هي شعاع دائرته المحيطة و R شعاع دائرته المحاطة.

نـتـائـج:

i) $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{1}{2R}$

ii) $S = \Pr$

iii) صيغة هيرون: $S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$

نتيجة:

(i)- شعاع الدائرة المحاطة بمثلث هي نقطة تقاطع واسطاته.

(ii)- شعاع الدائرة المحيطة بمثلث هي نقطة تقاطع منصفات زواياه.

م- خاصيات طاليس في مثلث:

لتكن E نقطة من المستقيم (AB) تخالف النقطتين A و B و F نقطة من المستقيم (AC) تخالف النقطتين A و C نفترض أن $(AB)//(AC)$

نتيجة: $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$, $\frac{\overline{BA}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CF}}$, $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{FC}}$.

ن- خاصيتي المنصف الداخلي والخارجي:

لتكن E هي موقع المنصف الداخلي للزاوية $\left[\widehat{BAC}\right]$ على (BC).

ه- خاصية المنصف الداخلي: $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

نفترض أن ABC ليس متساوي الساقين في A لتكن F هي موقع المنصف الخارجي على (BC) للزاوية $\left[\widehat{BAC}\right]$.

ي- خاصية المنصف الخارجي: $\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}$.

تمارين محلولة

تمرين 1 :

لتكن a و b و c أعدادا حقيقية موجبة قطعا.

1- بين أن : $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$.

2- نفرض أن : $a+b+c=1$.

بين أن : $\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{a+c}+\frac{bc}{b+c} \le \frac{1}{2}$.

تمرين 2:

b,a عددين حقيقيين موجبين قطعا.

a) 1- بين أن: $a+\frac{1}{a} \ge 2$.

2-إستنتج أن: $(a+b)+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \ge 4$.

b) بين أن: $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}) \ge 4$.

تمرين 3 : عمل $A=4ab-2\sqrt{2}a+2\sqrt{3}b-\sqrt{6}$

تمرين رقم 4 :

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

أحسب العدد A : $A=\frac{n}{n.(n+1)}+\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\frac{n}{(n+2)(n+3)}+..........+\frac{n}{2n(2n+1)}$

تمرين رقم 5:

أحسب العدد :

$A=1+(3-2)+(3^2-2^2)+(3^3-2^3)+.........(3^9-2^9)$

علما أن : $2^{10}=1024$ و $3^{10}=59049$

تمرين رقم 6 :

ABCD رباعي محدب محيطه P.

أتبث أن : $AC+BD<P<2(AC+BD)$

تمرين 7 :

قارن بين العددين :

$A=2000(1+2+3+..........+2001)$

$B=2001(1+2+3+..........+2000)$

تمرين 8:

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا بحيث : $a<b$

بين أن : $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b}<1<\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a}$

تمرين 9 :

1- قارن بين الأعداد : $\sqrt{2}$ و $\frac{36}{25}$ و $\frac{49}{36}$

2- حدد قيمة مقربة للعدد $x=\sqrt{\sqrt{2}}$ بدقة تكون أصغر من أو تساوي 0,02.

تمرين 10 :

-1 أحسب العدد : $x=\sqrt{35+10\sqrt{10}}$

-2 لتكن a و b و c أعدادا حقيقية موجبة قطعا و تحقق : $a^2-b=c^2$

أ- بين أن : $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$

ب- أحسب بطريقة أخرى العدد x

تمرين 11: x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا و يحققان ما يلي : $x^2+y^2=6xy$

ما هي قيمة الكسر التالي : $\dfrac{x+y}{x-y}$ ؟

تمرين 12:

a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا مجموعها 30 بحيث b هو المعدل الحسابي للعددين a و b و أما b - 4 فهو المعدل الهندسي للعددين a-5 و c.
أحسب الأعداد a و b و c.

تمرين 13 :

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$

-1 أحسب : $S=\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dots\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

-2 بين أن : $n<\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dots\dots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

تمرين 14 :

a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا و تحقق $a\le b\le c$.

بين أن : $\dfrac{3}{2}\le\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}$.

تمرين15:

بين أن : $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{6})\ge 48$

تمرين16:

بين أن : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}<13$

تمرين 17:

a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا

-1 بين أن : $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\le a+b+c$

-2 نفترض أن : $a+b+c=\dfrac{1}{3}$

بين أن : $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\le 1$

تمرين 18:

أحسب الجزء الصحيح للعدد الحقيقي :

$$x=\frac{2\sqrt{2000^4-1}}{\sqrt{2000^2-1}+\sqrt{2000^2+1}}$$

تمرين 19: b;a عددان حقيقيان يحققان: $a^2+b^2=1$ و $a^3+b^3=-1$. حدد زاوية α تحقق:
sin α = b و cos α =a .

تمرين 20 :

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة قطعا .

بين أن : (1) $$a+b+c+d \geq 4\sqrt{\sqrt{abcd}}$$

(2) $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4 .$$

تمرين 21 :

علما أن 2^{20}=1048576 أحسب العدد :

$$S = 15 + (15.16) + (15.16^2) + (15.16^2) + (15.16^3) + (15.16)$$

تمرين 22:

a و b و c أعداد حقيقية.

1) بين أن : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

2) بين أن : $a^2+b^2 \geq ab$

تمرين 23 :

نعتبر أنصاف مستقيم $(OX]$ و $(OY]$ و $(OZ]$. لتكن $A\in[OX)$ و $B\in[OY)$ و $C\in[OZ)$.

1- بين أنه إذا كانت النقط A و B و C مستقيمية و كان قياس الزاويتين $\left[\widehat{BOA}\right]$ و $\left[\widehat{BOC}\right]$ هو $60°$

فإن : $\frac{1}{OB}=\frac{1}{OC}+\frac{1}{OA}$

2- مثل هندسيا المعدل التوافقي لعددين a و c موجبين قطعا.

تمرين 24 : لتكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة تحقق : $3a^2 = 2(c^2-b^2)$

حدد أكبر هذه الأعداد الحقيقية.

تمرين 25: $\mathbb{R}^2$ في النظمة : $\begin{cases} xy^2+x^2y=-8 \\ xy+(x+y)=2 \end{cases}$

تمرين 26 :

ABC مثلث بين أنه إذا كان :

1- إرتفاعان في المثلث متساويان فإنه يكون متساوي الساقين .

2- متوسطان في المثلث متساويان فإنه يكون متساوي الساقين .

تمرين 27 :

$a=31^{11}$ و $b=17^{14}$

قارن بين العددين a و b.

تمرين 28 :

x و y و z و a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا تحقق : $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

بين أن : $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$

تمرين 29:

ABC مثلث و P نقطة داخله.

المستقيمات (AP) و (BP) و (CP) تقطع المستقيمات (BC) و (AC) و (BA) في D و E و F على التوالي .

بين أن : $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{PD}$

تمرين 30 :

بين أنه لا يوجد مثلث ABC قياس متوسطاته

$m_A=5$ و $m_B=4$ و $m_C=1$.

تمرين 31 :

a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا.

1- بين أن : $(a+b+c)^3 \geq 27abc$

2- استنتج أن : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$

تمرين 32:

EBC مثلث. لتكن A نقطة من القطعة [EB] و D نقطة من القطعة [EC]. نفترض أن المستقيم (AD) يقطع المستقيم (BC) في نقطة F. نعتبر النقط I و J و K على التوالي منتصفات القطع [EF] و [BD] و [AC].
بين أن النقط I و J و K نقط مستقيمية.

تمرين 33:

a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا. بين أن :

1- $a^2+b^2 \geq 2ab$

2- $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$

تمرين 34 :

بين أن : **A > 4** حيث :

$$A=(\sqrt{\cos 1}+\sqrt{\sin 1})(\sqrt{\cos 1}+\sqrt{\cot g 1})(\sqrt{\sin 1}+\sqrt{\cot g 1})$$

(الوحدة بالرادين)

تمرين 35 :

ABC مثلث مركز ثقل نقطة G. لتكن I و J و K هي على التوالي منتصفات القطع [AB] و [BC] و [AC].
بين أن المثلثات GAI و GIB و GBJ و GJC و GCK و GKA لها نفس المساحة S.

تمرين 36:

x و y و z : أعداد حقيقة موجبة قطعا .

بين أن $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{2z} \geq \frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$.

تمرين 37:

حل في ℝ المعادلة: $x^3+2x^2+4x+8=0$

تمرين38:

b,a عددين حقيقيين موجبين قطعا.

1- قارن بين الأعداد التالية: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ و $\frac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ab}$.

2- أحسب الجزء الصحيح للعدد:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2} .$$

تمرين39:

حل في مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية ℤ المعادلة:

$x=20-\sqrt{20-\sqrt{x}}$.

تمرين40:

بين أن: $\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} < \cos(1)+\sin(1) < \sqrt{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}$ (الوحدة المختارة هي الرادين)

تمرين41:

قياسات متوسطات مثلث هي على التوالي : $\sqrt{2};\frac{\sqrt{17}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}$. ما هي مساحة هذا المثلث؟

تمرين42:

a وb وc أعداد حقيقية موجبة قطعا.ما هو الشرط ألازم والكافي لكي تكون أطوال أضلاع مثلث ؟

تمرين43: ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا.

نضع : $a^3+\frac{1}{a^3}=18$. أحسب العدد: $a^4+\frac{1}{a^4}$.

تمرين44: حل في IR النظمة التالية:

$$\begin{cases} 2x^5-9x^4-10x^3+24x^2+7x-10=0 \\ x^2-5x=0 \end{cases}$$

تمرين45: a و b عدد ين حقيقيين بحيث: a>1 و b>4

1) أكتب على شكل: $(x-y)^2$ العدد الحقيقي: $A=a-2\sqrt{a-1}$.

2) أحسب العددين: a و b علما أن: $\sqrt{a-1}+2\sqrt{b-4}=\frac{a+b}{2}$.

تمرين 46:

1) x و y عددين حقيقيين غير منعدمين.

بين أن: $x^2-xy+y^2>0$.

2) حدد إشارة العدد الحقيقي: $A=\frac{1}{2003}-\sqrt{\frac{\pi}{2003}+\pi}$.

تمرين 47:

1) بين أن المعادلة : $x^3+3x+4=0$ تقبل حلا وحيدا في المجموعة: IR .

2) ليكن a عددا حقيقيا يحقق: $a^3-\frac{1}{a^3}=-4$.

أحسب الأعداد الحقيقية: $a-\frac{1}{a}$, $a^2+\frac{1}{a^2}$, $a^4+\frac{1}{a^4}$.

تمرين48: z,y,x أعداد حقيقية غير منعدمة.

a- بين أن: $(x+z=y)$ تكافئ $(x^3-y^3+x^2z+y^2z+xyz=0)$

b- حل في المعادلة: $x^3+x^2+\sqrt{2}x-2\sqrt{2}+2=0$.

تمرين 49: 1- d;c;b;a أعداد حقيقية غير منعدمة تحقق: a+b+c+d=1

بين أن: $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}$.

2- t;z;y;x أعداد حقيقية غير منعدمة تحقق: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}+\sqrt{t}=1$.

بين أن: $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}\geq\frac{1}{2}$.

تمرين 50:

a وb عددين حقيقيين موجبين قطعا. الأعداد الحقيقية : $m_1=\frac{a+b}{2}$ و $m_2=2\frac{ab}{a+b}$ و $m_3=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ و $m_4=\sqrt{ab}$ هي على التوالي : المعدل الحسابي و المعدل التوافقي والمعدل ألتربيعي والمعدل الهندسي للعددين:a وb.

1) نضع a=4 وb=3 أحسب المعدل الحسابي و المعدل التوافقي والمعدل ألتربيعي والمعدل الهندسي للعددين:a وb.

2) أ) أول هندسيا المعدل الحسابي و المعدل التوافقي والمعدل ألتربيعي والمعدل الهندسي للعددين:a وb.

ب) استنتج هندسيا أن: $m_2\leq m_4\leq m_1\leq m_3$.

إنجاز للتمارين

تمرين 1 :

1- بمقارنة المعدل الحسابي و الهندسي للعددين a و b . نحصل على : $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

إذن : $\sqrt{ab}^2 \le (\frac{a+b}{2})^2$ أي $ab \le \frac{(a+b)^2}{4}$.

و منه : $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$

2- حسب (1) لدينا : $\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}$

و $\frac{ac}{a+c} \le \frac{a+c}{4}$

و $\frac{bc}{b+c} \le \frac{b+c}{4}$

و بجمع المتفاوتات طرفا طرفا نحصل على :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \le \frac{a+b}{4} + \frac{a+c}{4} + \frac{b+c}{4}$$

أي : $$\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \le \frac{2(a+b+c)}{4} = \frac{2.1}{4} = \frac{1}{2}$$

تمرين 15: بمقارنة المعدلين الهندسي و الحسابي نحصل على :

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} \ge 2\sqrt{\sqrt{12}}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \ge 2\sqrt{\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{6} \ge 2\sqrt{\sqrt{18}}$$

إذن : $$(\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \ge 8\sqrt{\sqrt{1296}}$$

أي : $$(\sqrt{2} + \sqrt{6})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{6}) \ge 48$$

تمرين 3 :

$$\begin{aligned} A &= (4ab - 2\sqrt{2}a) + (2\sqrt{3}b - \sqrt{6}) \\ &= 2a(2b - \sqrt{2}) + \sqrt{3}(2b - \sqrt{2}) \\ &= (2b - \sqrt{2})(2a + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

تمرين 4 :

ليكن $P \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $\frac{1}{P(P+1)} = \frac{1}{P} - \frac{1}{P+1}$

ليكن : $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا إذن :

$$\begin{aligned} A &= \frac{n}{n.(n+1)} + \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{(n+2)(n+3)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{n}{2n(2n+1)} \\ &= n((\frac{1}{n}.\frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) + \ldots.. + (\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}) \\ &= n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}) = 1 - \frac{n}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

إذن : $$A = \frac{n+1}{2n+1}$$

تمرين 5 :

$$A = 1 + (3-2) + (3^2 - 2^2) + (3^3 - 2^3) + ...(3^9 - 2^9)$$

إذن : $A = (1+3+...+3^9) - (2+....+2^9)$

$$= \frac{1-3^{10}}{1-3} - ((\frac{1-2^{10}}{1-2}) - 1)$$

$$= \frac{3^{10}-1}{2} - (2^{10} - 2) = 28502$$

تمرين 7 : ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ نعلم أن : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

إذن : $1 + 2 + 3 + ... + 2001 = \frac{2001.2002}{2}$

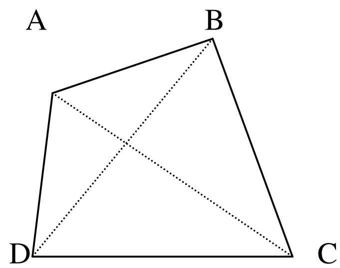
و $1 + 2 + 3 + ... + 2000 = \frac{2000.2001}{2}$

إذن : $A = \frac{2000.2001.2002}{2}$

و $B = \frac{2001.2000.2001}{2}$

و منه : $B < A$.

تمرين رقم 6 :



لتكن O هي نقطة تقاطع قطري ABCD

لدينا :

$$AC < AB + BC ; BD < AB + AD$$

$$BD < CD + CB ; AC < DA + DC$$

بجمع المتفاوتات طرفا طرفا نحصل على : $2(AC + BD) < 2P$

أي : $AC + BD < P \quad (1)$

من جهة أخرى لدينا :

$$DC < OD + OC ; AB < OA + OB$$

$$AD < AO + OD ; BC < BO + OC$$

بجمع المتفاوتات طرفا طرفا نحصل على : $P < 2(AC+BD) \quad (2)$

من (1) و (2) نستنتج : $AC+BD < P < 2(AC+BD)$

تمرين 8 :

لدينا : $a < b$ إذن $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

و $\inf(\sqrt{a},\sqrt{b}) < \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \sup(\sqrt{a},\sqrt{b})$

أي : $\sqrt{a} < \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} < \sqrt{b}$

أي : $a < \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4} < b$

إذن : $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4b} < 1$ و $1 < \dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4a}$

<u>تمرين 9 :</u>

1- بما أن : $\dfrac{49}{36} \approx 1,36...$ و $\dfrac{36}{25} = 1,44$

فإن : $\dfrac{49}{36} < 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 < \dfrac{36}{25}$

إذن : $\dfrac{49}{36} < \sqrt{2} < \dfrac{36}{25}$

2- حسب (1) لدينا : $\dfrac{49}{36} < \sqrt{2} < \dfrac{36}{25}$

إذن $\dfrac{7}{6} < \sqrt{\sqrt{2}} < \dfrac{6}{5}$ و لدينا : $\dfrac{6}{5} = 1,2$ و $\dfrac{7}{6} \approx 1,166..$

إذن : $1,16 < \sqrt{\sqrt{2}} < 1,2$

مركز التأطير هو : 1,18 قيمة مقربة للعدد $\sqrt{\sqrt{2}}$ إلى الشعاع 0,02.

<u>تمرين 10 :</u>

$$35 + 10\sqrt{10} = 5^2 + 2.5\sqrt{10} + \sqrt{10}^2 = (5+\sqrt{10})^2$$

إذن $x = 5 + \sqrt{10}$

-2

أ- $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+c}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$

تكافئ : $\sqrt{a+\sqrt{b}}^2 = (\sqrt{\dfrac{a+c}{2}})^2 + (\sqrt{\dfrac{a-c}{2}})^2 + 2\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}.\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$

تكافئ : $a+\sqrt{b} = \dfrac{a+c}{2} + \dfrac{a-c}{2} + 2\sqrt{\dfrac{a^2-c^2}{4}}$

تكافئ $a+\sqrt{b} = a + 2\sqrt{\dfrac{b}{4}} = a + \sqrt{b}$

إذن : $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a+c}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$

أ- لدينا : $35^2 - 1000 = 225 = 15^2$

إذن حسب (1) لدينا :

$$\sqrt{35+\sqrt{1000}} = \sqrt{35+10\sqrt{10}}$$
$$= \sqrt{\frac{35+15}{2}} + \sqrt{\frac{35-15}{2}}$$
$$= \sqrt{25} + \sqrt{10} = 5 + \sqrt{10}$$

تمرين 12 :

لدينا b هو المعدل الحسابي للعددين a و c

إذن : $\frac{a+c}{2}=b$ و بما أن $a+b+c=30$

فإن : $3b=30$ أي : $b=10$

من جهة أخرى لدينا $b-4$ أي 6 هو المعدل الهندسي للعددين $a-5$ و c

إذن : $30=c(a-5)$

و بما أن : $a+b+c=30$ أي $a+c=20$ فإن : $36=(20-a)(a-5)$

أي : $a^2-25a+136=0$

$\Delta=81$ إذن a=8 أو a=17

و منه c=12 أو c=3

إذن الأعداد هي : a = 8 و b =10 و c = 12

أو a = 17 و b = 10 و c = 3

تمرين 13 :

-1 ليكن $P\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $\frac{1}{\sqrt{P}+\sqrt{P+1}}=\sqrt{P+1}-\sqrt{P}$ إذن :

$$S=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+......+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

إذن :

$$S=\sqrt{n}-\sqrt{1}=\sqrt{n}-1$$

ليكن : $P\in\mathbb{N}^*$ لدينا : $\frac{1}{\sqrt{P}+\sqrt{P-1}}<\frac{1}{\sqrt{P}}$ إذن :

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}<\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ و......... و } \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

إذن بجمع المتفاوتات طرفا طرفا نحصل على : $S<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}$

أي

$$\sqrt{n}-\sqrt{1}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

و بالتالي :

$$\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+........+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

تمرين 14 :

لدينا $b\le c$ إذن $a+b\le a+c$

و $a\le b$ إذن $a+c\le b+c$

و منه $a+b\le a+c\le b+c$ أي $\frac{1}{b+c}\le\frac{1}{a+c}\le\frac{1}{a+b}$

و من جهة أخرى لدينا : $0<a\le b\le c$ إذن حسب خاصية تسبيتشيف نحصل على :

$$\frac{1}{3}(a+b+c)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b})\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

أي :

$$\frac{1}{3}((1+\frac{a}{b+c})+(1+\frac{b}{a+c})+(1+\frac{c}{a+b}))\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

أي :

$$1+\frac{1}{3}(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b})\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

و بالتالي:

$$\frac{3}{2}\le\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

تمرين 15:

بمقارنة المعدل الحسابي و ألتربيعي

نحصل على : $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{2} < \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2+\sqrt{7}^2}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

و $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2} < \sqrt{\frac{\sqrt{3}^2+\sqrt{6}^2}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

و $\frac{\sqrt{4}+\sqrt{5}}{2} < \sqrt{\frac{\sqrt{4}^2+\sqrt{5}^2}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

إذن : $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7} < 2.3.\frac{3}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2} < 13$.

<u>تمرين 17:</u>

<u>1</u>– بمقارنة المعدلين الهندسي و الحسابي نحصل على : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}$ و $\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}$

إذن بجمع المتفاوتات طرفا طرفا نحصل على :

$$\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc} \leq a+b+c$$

(2) لدينا : $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 = a+b+c+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc})$

إذن : $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 = \frac{1}{3}+2(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}) \leq \frac{1}{3}+2(a+b+c)$

إذن : $(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \leq 1$ و منه $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq 1$

<u>تمرين 18 :</u> لدينا :

$$x = \frac{2\sqrt{2000^4-1}}{\sqrt{2000^2-1}+\sqrt{2000^2+1}}$$
$$= \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2000^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{2000^2+1}}}$$

إذن x هو المعدل التوافقي للعددين : $\sqrt{2000^2-1}$ و $\sqrt{2000^2+1}$

بمقارنة المعدل التوافقي و المعدل ألتربيعي نحصل على : $x < \sqrt{\frac{\sqrt{2000^2-1}^2+\sqrt{2000^2+1}^2}{2}} = 2000$

و من جهة أخرى لدينا $\sqrt{2000^2-1} = \inf(\sqrt{2000^2-1}, \sqrt{2000^2+1}) < x$

إذن : $\sqrt{2000^2-1} < x < 2000$

$1999 < \sqrt{2000^2-1}$ تعني : $1999^2 < 2000^2-1$

تعني : $1 < 2000^2 - 1999^2$

تعني : $1 < (2000-1999)(2000+1999)$

تعني : $1 < 3999$

إذن $1999 < x < 2000$ و منه : $[x] = 1999$.

<u>تمرين 20 :</u> 1 ليكن x و y عددين حقيقيين نعلم أن : $x+y \geq 2\sqrt{xy}$

إذن : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ و : $c+d \geq 2\sqrt{cd}$

ومنه : $a+b+c+d \geq 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\right)$

وبما أن : $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}$

أي : $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \geq 2\sqrt{\sqrt{abcd}}$

فإن : $(1)\quad a+b+c+d \geq 4\sqrt{\sqrt{abcd}}$

2 حسب (1) لدينا : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{a}}}$

أي : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geq 4\sqrt{\sqrt{1}} = 4$

تمرين 21 :

$$S = 15(1+16+16^2+16^3+16^4)$$
$$= 15(\frac{1-16^5}{1-16})$$
$$= 15(\frac{1-16^5}{15}) = \frac{1-16^5}{-1} = 16^5 - 1$$

و منه : $S = (2^4)^5 - 1 = 2^{20} - 1 = 1048576$

تمرين 22 : 1) ليكن x و y من $\mathbb{R}$.

$(x-y)^2 \geq 0$ تعني $x^2+y^2-2xy \geq 0$ تعني $x^2+y^2 \geq 2xy$

و منه : $a^2+b^2 \geq 2ab$

$a^2+c^2 \geq 2ac$

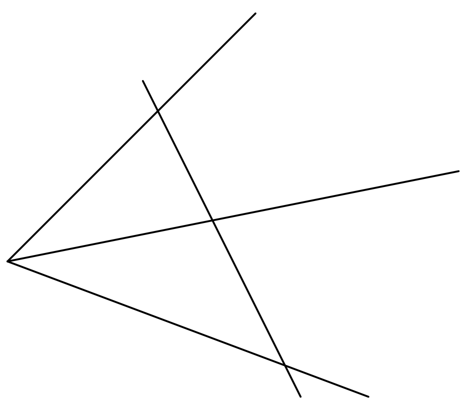
$b^2+c^2 \geq 2bc$

بجمع المتفاوتات طرفا طرفا نحصل على :

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$$

3) بأخذ c = 0 في النتيجة السابقة نحصل على $a^2+b^2 \geq ab$.

تمرين 23 : مساحة المثلث OAB هي : $S_1 = \frac{1}{2}OA.OB\sin 60$



أي : $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}OA.OB$

مساحة المثلث OBC هي : $S_2 = \frac{1}{2}OB.OC\sin 60$

أي : $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}OB.OC$

و مساحة المثلث OAC هي : $S_3 = \frac{1}{2}OA.OC\sin 120$ أي : $S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}OA.OC$

و بما أن : $S_3 = S_1 + S_2$ فإن :

$$\frac{\sqrt{3}}{4}OA.OC = \frac{\sqrt{3}}{4}OA.OB + \frac{\sqrt{3}}{4}OB.OC$$

أي : $OA.OC = OA.OB + OB.OC$

أي : $\frac{OA.OC}{OA.OB.OC} = \frac{OA.OB}{OA.OB.OC} + \frac{OB.OC}{OA.OB.OC}$

وبالتالي : $\frac{1}{OB} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OA}$

-2

المعدل التوافقي للعددين a و c هو : $m = \frac{2ac}{a+c} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$ أي $\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

نعتبر في المستوى نقطا A و C و O بحيث : $OA = a$ و $OC = c$ و $\widehat{AOC} = 120^\circ$.

لتكن B هي نقطة تقاطع منصف الزاوية $\left[\widehat{AOC}\right]$ الداخلي مع المستقيم $[AC]$.

حسب السؤال الأول لدينا :

$$\frac{1}{OB} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$$

إذن : $\frac{2}{m} = \frac{1}{OB}$ أي $m = 2OB$

نضع $OM = m$ إذن $OM = 2OB$

ومنه M هي مماثلة O بالنسبة للنقطة B.

<u>تمرين 24 :</u> $2(c^2 - b^2) = 3a^2$

$3a^2 \geq 0$ إذن : $\begin{cases} c^2 \geq b^2 \\ c \geq 0 \text{ و } b \geq 0 \end{cases}$ إذن : $c \geq b$

$3a^2 = 2(c^2 - b^2)$ تعني : $2a^2 + a^2 = 2c^2 - 2b^2$ تعني : $2(c^2 - a^2) = a^2 + 2b^2$

بما أن : $a^2 + 2b^2 \geq 0$ فإن : $c^2 \geq a^2$ و لدينا : $a \geq 0$ و $c \geq 0$ إذن : $c \geq a$

و بالتالي : c هي أكبر الأعداد.

<u>تمرين 25 :</u> النظمة تكافئ $\begin{cases} xy\,(x+y) = -8 \\ xy + (x+y) = 2 \end{cases}$

نضع $S = x + y$ و $p = xy$ إذن النظمة تصبح :

$\begin{cases} ps = -8 \\ p + s = 2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} s = 2 - P & (1) \\ ps = -8 & (2) \end{cases}$

وبتعويض (1) في (2) نحصل على : $P(2-p) = -8$

أي : $P^2 - 2p - 8 = 0$

$\Delta' = 9$ و $P = -2$ أو $P = 4$

ومنه : $S_1 = 4$ و $S_2 = -2$

<u>حالة</u> $S_1 = 4$ و $P_1 = -2$

نعتبر إذن النظمة : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = -2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} y = 4 - x & (3) \\ xy = -2 & (4) \end{cases}$

وبتعويض (3) في (4) نحصل على : $x(4-x) = -2$

أي : $x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta' = 4 + 2 = \sqrt{6}$ إذن $x_1 = 2 - \sqrt{6}$ و $x_2 = 2 + \sqrt{6}$

ومنه : $y_1 = 2 + \sqrt{6}$ و $y_2 = 2 - \sqrt{6}$

حالة $S_2=-2$ و $P_2=4$.

نعتبر إذن النظمة : $\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=4 \end{cases}$ أي $\begin{cases} y=-2-x & (5) \\ xy=4 & (6) \end{cases}$

و بتعويض (5) في (6) نحصل على $x(-2-x)=4$ أي :

$x^2+2x+4=0$; $\Delta'=-3<0$; إذن $x\in\phi$

و بالتالي : $S=\{(2-\sqrt{6},2+\sqrt{6}),(2+\sqrt{6},2-\sqrt{6})\}$

<u>تمرين 26 :</u>

1- ليكن h_A و h_B هـــــما على الـــتوالي طولي ارتفاعا المثلث ABC المتساويان و المنشئين من A و B .

مساحة المثلث ABC هي : $S=\frac{1}{2}h_A BC$ و $S=\frac{1}{2}h_B AC$ إذن : $\frac{1}{2}h_B AC=\frac{1}{2}h_A BC$

و بما أن : $h_A=h_B$ فإن $BC=AC$ أي ABC متساوي الساقين في C.

2- ليكن m_A و m_B هـــــما على التوالي : طولي المتوسطين المنشئان من A و B و المتساويان حسب مبرهنة ا لمتوسط . لدينا :

$$(1)\quad AB^2+AC^2=2m_A^2+\frac{1}{2}BC^2$$

$$(2)\quad BC^2+BA^2=2m_B^2+\frac{1}{2}AC^2$$

بما أن : $m_A=m_B$ فإن : (1)−(2) تكافئ :

$AC^2-BC^2=\frac{1}{2}BC^2-\frac{1}{2}AC^2$ أي : $\frac{3}{2}AC^2-\frac{3}{2}AC^2=0$

أي : $AC=BC$ و منه ABC يكون متساوي الساقين في C.

<u>تمرين 27:</u>

$$\frac{b}{a}=\frac{17^{14}}{31^{11}}\geq\frac{16^{14}}{32^{11}}\geq\frac{(2^4)^{14}}{(2^5)^{11}}$$

إذن : $\frac{b}{a}\geq\frac{2^{56}}{2^{55}}=2>1$

و منه : $b>a$

<u>تمرين28:</u> نضع $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{3}{c}=m$

إذن : $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{a^2m}+\sqrt{b^2m}+\sqrt{c^2m}$

$=a\sqrt{m}+b\sqrt{m}+c\sqrt{m}=(a+b+c)\sqrt{m}$

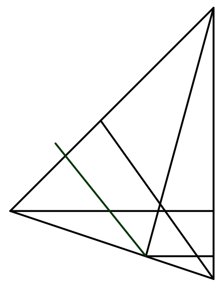
و حسب خاصية التناسب لدينا : $\frac{x+y+z}{a+b+c}=m$

إذن : $\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}=\sqrt{(a+b+c)^2m}=(a+b+c)\sqrt{m}$

و منه : $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=\sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$.

<u>تمرين29:</u> لتكن 'D مسقط D على (AC) بتواز مع (BE) و "D مسقط D على (AB) بتواز مع (CF).

في المثلث 'ADD لدينا : (PE)//(DD') إذن : $\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{ED'}$



في المثلث "ADD لدينا : (FP) // (DD") إذن $\frac{AP}{PD}=\frac{AF}{FD''}$

و منه : $\frac{AP}{PD}=\frac{AF}{FD''}=\frac{AE}{ED'}$

في المثلث BCE لدينا : (DD') // (BE) إذن : $\frac{ED'}{EC}=\frac{BD}{BC}$

أي : $ED'=\frac{CD \text{ x } FB}{BC}$

في المثلث BCF لدينا : (DD") // (FC)

إذن : $\frac{FD''}{FB}=\frac{CD}{CB}$ أي $FD''=\frac{CD \text{ x } FB}{CB}$

و بما أن : $\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{ED'}=\frac{AF}{FD''}$ فإن : $\frac{AP}{PD}=\frac{AE \text{ x } CB}{BD \text{ x } EC}=\frac{AF \text{ x } CB}{CD \text{ x } FB}$

إذن : $\frac{AE}{EC}=\frac{AP \text{ x } BD}{PD \text{ x } CB}$ أي $\frac{AF}{FB}=\frac{AP}{PD} \text{ x } \frac{CD}{CB}$

و منه : $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{PD}(\frac{CD}{CB}+\frac{BD}{CB})$

$=\frac{AF}{PD} \text{ x } \frac{OB}{CB}=\frac{AP}{PD}$

و بالتالي : $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{PD}$.

تمرين11:

$$(\frac{x+y}{x-y})^2=\frac{x^2+y^2+2xy}{x^2+y^2-2xy}$$
$$=\frac{6xy+2xy}{6xy-2xy}=\frac{8xy}{4xy}=2$$

إذن : $\frac{x+y}{x-y}=\sqrt{2}$ أو $\frac{x+y}{x-y}=-\sqrt{2}$.

تمرين30: نضع : $BC=a$ و AC= b و AB = c و $P=\frac{a+b+c}{2}$

لدينا حسب مبرهنة المتوسط : $b^2+c^2=50+\frac{1}{2}a^2$

و $a^2+c^2=32+\frac{1}{2}b^2$ و $a^2+b^2=2+\frac{1}{2}c^2$

و منه النظمة :

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & -\frac{1}{2}a^2+b^2+c^2=50 \\ (2) & a^2-\frac{1}{2}b^2+c^2=32 \\ (3) & a^2+b^2-\frac{1}{2}c^2=2 \end{array}\right\}$$

$(1)-(2)$ تعني $-\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2=18$ أي $(4)\quad -a^2+b^2=12$

$2(3)+(2)$ تعني $3a^2+\frac{3}{2}b^2=36$ أي $(5)\quad 2a^2+b^2=24$

$(5)-(4)$ تعني $3a^2=12$ أي $a^2=4$ أي $a=2$

و منه $b^2=16$ أي $b=4$

و من (3) نستنتج أن : $c^2=2(a^2+b^2-2)=36$ أي : $c=6$

و منه حسب خاصية هيرون مساحة المثلث ABC هي :

$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}=\sqrt{6.4.2.0}$ إذن $S=0$

نستنتج إذن أنه لا يوجد مثلث متوسطا ته هي: 1 و 4 و 5.

تمرين31: لدينا :

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(ab^2+ac^2+a^2b+a^2c+bc^2+b^2c)+6abc$

بما أن :

$ab^2+ac^2+a^2b+a^2c+bc^2+b^2c$

$=(ab^2+ac^2)+(a^2b+bc^2)+(a^2c+b^2c)$

$=a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)$

$=a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2+6abc$

فإن :

$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2)+24abc$

و بما أن :

$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$

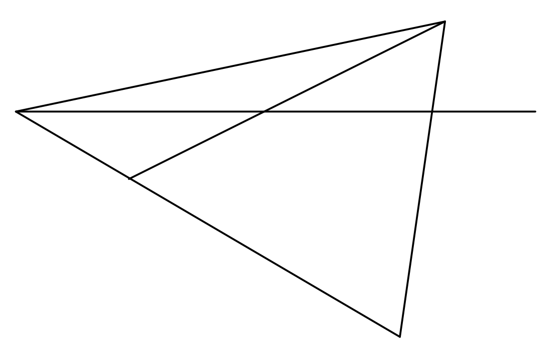
فإن : $(a+b+c)^3\geq 3(a(b-c)^2+b(a-c)^2+c(a-b)^2+27abc$

و منه : $(a+b+c)^3\geq 27abc$

2- حسب السؤال (1) لدينا : $(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^3\geq 27.\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}$

أي : $(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})^3\geq 27$ و منه $(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\geq 3$.

تمرين32:



نحدد وضع النقطة F في المستقيم (BC).

لتكن 'B هي مسقط النقطة B على المستقيم (EC) بتواز مع (AD) في المثلث 'EBB. لدينا (BB') // (AD) إذن حسب خاصية طاليس لدينا :

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{ED}}{\overline{EB'}} \quad (1).$$

في الثلث CDF لدينا : (BB') // (DF) إذن حسب خاصية طاليس لدينا : $\frac{\overline{CB'}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CF}}$.

نضع : $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=x$ إذن $\overline{ED}=x\overline{EB'}$ أي :

$$\overline{ED}=x(\overline{EC}+\overline{CB'})=x\overline{EC}+x\overline{CB'}$$

و منه : $\overline{CB'}=\frac{1}{x}\overline{ED}-\overline{EC}$ و بالتعويض في (2) نحصل على : (3) $\frac{\frac{1}{x}\overline{ED}-\overline{EC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CF}}$

نضع : $\frac{\overline{ED}}{\overline{EC}}=y$ إذن : $\overline{ED}=y\overline{EC}$ أي : $\overline{CD}=y\overline{EC}-\overline{EC}=(y-1)\overline{EC}$

و بالتعويض في (3) نحصل على : $\frac{\frac{1}{x}\overline{ED}-\overline{EC}}{(y-1)\overline{EC}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CF}}$

أي : $\frac{\frac{y}{x}\overline{EC}-\overline{EC}}{(y-1)\overline{EC}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CF}}$ و منه : $\frac{\overline{CB}}{\overline{CF}}=\frac{\frac{y}{x}-1}{y-1}$

أي : $\overline{CF}=\frac{xy-x}{y-x}\overline{CB} \quad (4)$

ننسب المعلم إلى المعلم : $R(C,\vec{CB},\vec{CE})$.

لدينا : $C(0,0)$ و $B(1,0)$ و $E(0,1)$

$\vec{EA}=x\vec{EB}$ تعني : $\vec{EC}+\vec{CA}=x\vec{EC}+x\vec{CB}$ تعني : $\vec{AC}+\vec{EC}=x\vec{EC}+x\vec{CB}$

أي : $\vec{AC}=(1-x)\vec{EC}-x\vec{CB}$ أي : $\vec{CA}=x\vec{CB}+(1-x)\vec{CE}$ و بالتالي : $A(x,1-x)$

$\vec{ED}=y\vec{EC}$ تعني : $\vec{EC}+\vec{CD}=y\vec{EC}$ تعني : $\vec{CD}=(y-1)\vec{EC}=(1-y)\vec{CE}$

و منه $D(0,1-y)$

من (4) : نستنتج : $F(\frac{xy-x}{y-x},0)$

بما أن : I و J و K هي على التوالي منتصفات القطع : [EF] و [BD] و [AC] على التوالي فإن :

$$K(\frac{x}{2},\frac{1-x}{2}) \quad و \quad J(\frac{1}{2},\frac{1-4}{2}) \quad و \quad I(\frac{xy-x}{2(y-x)},\frac{1}{2})$$

و منه : $\vec{JK}=(\frac{x-1}{2},\frac{y-x}{2})$ و $\vec{IJ}=(\frac{y(1-x)}{2(y-x)},\frac{-y}{2})$

لدينا : $\vec{IJ}=\frac{-y}{y-x}.\vec{JK}$

إذن النقط : I و J و K مستقيمية.

تمرين 33 :

طريقة أ :

بمقارنة المعدلين الهندسي و ألتربيعي للعددين a و b نحصل على :

$$\sqrt{ab} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

أي : $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ أي : $2ab \le a^2+b^2$

طريقة ب :

$(a-b)^2 \ge 0$ تعني : $a^2-2ab+b^2 \ge 0$

2-نعتبر المتطابقة : $a^3+b^3+c^3-3abc = \dfrac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)$.

لدينا: $0 \le \dfrac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)$ إذن : $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$.

تمرين 34 :

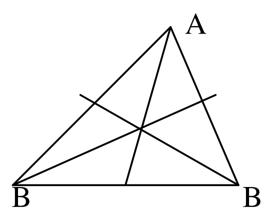
بمقارنة المعدلين الحسابي و الهندسي لعددين موجبين قطعا $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ نحصل على : $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \ge 2\sqrt{\sqrt{ab}}$
:

إذن : $(\sqrt{a}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{c}) \ge 8\sqrt{\sqrt{ab.ac.bc}}$

و منه : $A \ge 8\sqrt{\cos 1.\sin 1.\dfrac{\cos 1}{\sin 1}}$ أي : $A \ge 8\sqrt{\cos^2 1}$ أي : $A \ge 8\cos 1 > 4$

لأن : $1 < \dfrac{\pi}{3}$ تستلزم أن : $\cos 1 > \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

تمرين 35 :



لتكن S هي مساحة المثلث GCJ لدينا :

$$S = \frac{1}{2}CJ.JG\sin J$$
$$= \frac{1}{2}JB.JG\sin(180-J)$$
$$= S_{GJB}$$

و من جهة أخرى لدينا :

$$S = \frac{1}{2}CG.JG\sin G$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{2}{3}CI)(\frac{1}{3}AJ)\sin G$$
$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}CI)(\frac{2}{3}AJ)\sin G$$
$$= \frac{1}{2}GI.AJ\sin G = S_{AGI}$$

إذن : GCJ و GJB و GAI لهل نفس المساحة و هذا كاف.

تمرين 36 :

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا. بمقارنة معدليهما الحسابي و التوافقي نحصل على : $\frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$

أي : $\frac{2}{a+b} \leq \frac{a+b}{2ab}$ أي : $\frac{2}{a+b} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$.

و منه :
$$\frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}$$
$$\frac{2}{x+z} \leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{2z}$$
$$\frac{2}{y+z} \leq \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z}$$

و بجميع المتفاوتات طرفا طرفا نحصل على :
$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{x+z} + \frac{2}{y+z} \leq 2(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z})$$

أي :
$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z}$$

تمرين 37:

أ- a- $(x^3 - y^3 + x^2z + y^2z + xyz = 0)$ تكافئ $(x-y)(x^2+y^2+xy) + z(x^2+y^2+xy) = 0$ تكافئ $(x-y+z)(x^2+y^2+xy) = 0$ تكافئ $(x^2+y^2+xy) = 0$ أو $(x-y+z) = 0$ تكافئ $(x-y+z) = 0$

(لأن $\Delta = -3y^2$ مميز الثلاثية الحدود: x^2+yx+y^2 سالب قطعا).

b- نعوض في السؤال السابق العدد y بالعدد $\sqrt{2}$ و العددz بالعدد 1نحصل على: $x^3 + x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} + 2 = 0$ تكافئ $x+1 = \sqrt{2}$ أي $x = \sqrt{2} - 1$.

ب- $(x^4 - y^4 + x^3z + x^2yz + xy^2z + y^3z = 0)$ تكافئ $(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3) + z(x^3+x^2y+xy^2+y^3) = 0$ تكافئ $[(x-y)+z](x^3+x^2y+xy^2+y^3) = 0$

تكافئ $(x^3+x^2y+xy^2+y^3) = 0$ أو $(x-y)+z = 0$ تكافئ

$(x+y)(x^2-xy+y^2)+x^2y+xy^2) = 0$ أو $(x-y)+z = 0$ تكافئ

$(x+y)(x^2-xy+y^2)+xy(x+y) = 0$ أو $(x-y)+z = 0$ تكافئ

$(x+y)(x^2+y^2) = 0$ أو $(x-y)+z = 0$ تكافئ $(x+y) = 0$ أو $(x-y)+z = 0$.

تمرين 40:

لدينا: $(\cos 1 + \sin 1)^2 = \cos^2 1 + \sin^2 1 + 2\cos 1.\sin 1$ أي : $(\cos 1 + \sin 1)^2 = 1 + 2\cos 1.\sin 1$

من جهة أخرى لدينا : $\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$ إذن : $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{3} < \cos 1 < \cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} < \sin 1 < \sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} \frac{1}{2} < \cos 1 < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ إذن:

$\frac{\sqrt{2}}{4} < \cos 1.\sin 1 < \frac{\sqrt{6}}{4}$ ومنه: $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < (\cos 1 + \sin 1)^2 < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ أي: $\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} < (\cos 1 + \sin 1) < \sqrt{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}$.

تمرين3 : ليكن ABCهو ذالك المثلث.نضع : $BC = a$ و AC= b و AB = c .

لدينا حسب مبرهنة المتوسط : $b^2 + c^2 = 4 + \frac{1}{2}a^2$ و $a^2 + c^2 = \frac{17}{2} + \frac{1}{2}b^2$ و $a^2 + b^2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}c^2$

و منه النظمة :
$$\begin{cases} (1) \quad -\frac{1}{2}a^2+b^2+c^2=4 \\ (2) \quad a^2-\frac{1}{2}b^2+c^2=\frac{17}{2} \\ (3) \quad a^2+b^2-\frac{1}{2}c^2=\frac{5}{2} \end{cases}$$

$(1)-(2)$ تعني $-\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2=\frac{-9}{2}$ أي $(4) \quad -a^2+b^2=-3$

$2(3)+(2)$ تعني $3a^2+\frac{3}{2}b^2=\frac{27}{2}$ أي $(5) \quad 2a^2+b^2=9$

$(5)-(4)$ تعني $3a^2=12$ أي $a^2=4$ أي $a=2$

و منه $b^2=1$ أي $b=1$

و من (3) نستنتج أن : $c^2=2(a^2+b^2-\frac{5}{2})=5$ أي : $c=\sqrt{5}$

من جهة أخرى لدينا: $a^2+b^2=2^2+1^2=5=c^2$ إذن المثلث ABC قائم الزاوية في C إذن مساحة المثلث هي:

$S=\frac{1}{2}CA.CB=\frac{1}{2}b.a=\frac{1}{2}1.2=1$.

تمرين42: نعتبر مثلث طول أضلاعه : aوbوc.مساحته هي :

$S=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ حيث $P=\frac{a+b+c}{2}$ يمثل نصف محيطه.إذن لدينا:

$\begin{cases} p>a \\ p>b \\ p>c \end{cases}$ أي $\begin{cases} \frac{a+b+c}{2}>a \\ \frac{a+b+c}{2}>b \\ \frac{a+b+c}{2}>c \end{cases}$ أي $\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases}$.

عكسيا نفترض أن : $\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases}$.ننشئ في المستوى قطعة : [AB] طولها : c ثم ننشئ دائرتين مركزاهما على التوالي :Aو B

وشعاعاهما على التوالي: b و c .بما أن: a+b>c فإن الدائرتين يتقاطعان في نقطتين: C و'C.إن أ طوال الأضلاع الثلاثة للمثلثين: ABCو 'ABC هي:a وb وc.

خاصية: تكون أعدا د حقيقية موجبة قطعا aوbوc أطوال أضلاع مثلث إدا وفقط إدا كانت تحقق ما يلي: $\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases}$

تمرين43: حسب متطابقة هامة لدينا: $a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})(a^2-a.\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2})$

أي : $a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})(a^2-1+\frac{1}{a^2})$. وبما أن:

$(a+\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$ فإن: $(a+\frac{1}{a})^2-3=a^2-1+\frac{1}{a^2}$ وبالتعويض في المتساوية السابقة نحصل على:

$a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})[(a+\frac{1}{a})^2-3]$.أي: $18=(a+\frac{1}{a})[(a+\frac{1}{a})^2-3]$. إذن بوضع : $(a+\frac{1}{a})=t$ نحصل على:

$18=t[t^2-3]$.أي: $t^3-3t-18=0$ و بما أن: 3 جدر لهده المعادلة فإن:

$t^3-3t-18=0$ تكافئ: $(t-3)(t^2+3t+6)=0$.مميز المعادلة: $t^2+3t+6=0$ سالب قطعا إذن:

$t^3-3t-18=0$ تكافئ: $t-3=0$.ومنه: $t=3$ أي: $(a+\frac{1}{a})=3$. من جهة أخرى حسب متطابقة هامة لدينا:

$(a^2+\frac{1}{a^2})^2=a^4+\frac{1}{a^4}+2$ أي $(a^2+\frac{1}{a^2})^2-2=a^4+\frac{1}{a^4}$ وبما أن: $(a+\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$ أي:

$(a+\frac{1}{a})^2-2=a^2+\frac{1}{a^2}$ فإن: $a^2+\frac{1}{a^2}=7$ وبالتعويض في: $(a^2+\frac{1}{a^2})^2-2=a^4+\frac{1}{a^4}$ نحصل على:

$a^4+\frac{1}{a^4}=47$.

تمرين45:

-1 $(\sqrt{a-1}-1)^2+(\sqrt{b-1}-2)^2=0$.

-2 $\sqrt{a-1}+2\sqrt{b-4}=\frac{a+b}{2}$ تكافئ: $2\sqrt{a-1}+4\sqrt{b-4}=a+b$ تكافئ:

$(a-2\sqrt{a-1})+(b-4\sqrt{b-4})=0$ تكافئ: $(\sqrt{a-1}-1)^2+(\sqrt{b-4}-2)^2=0$ تكافئ:

$(\sqrt{a-1}-1)^2=(\sqrt{b-4}-2)^2=0$ تكافئ: $(\sqrt{a-1}-1)=(\sqrt{b-4}-2)=0$ تكافئ:

$(\sqrt{b-4}-2)=0$ أو $(\sqrt{a-1}-1)=0$ تكافئ: $\sqrt{b-4}=2$ أو $\sqrt{a-1}=1$ تكافئ: $b-4=4$ أو $a-1=1$ تكافئ:

$b=8$ أو $a=2$.

تمرين رقم46:

1-إذا كان للعددين: x وy إشارتين مختلفتين فبديهي أن: $x^2-xy+y^2>0$.نفترض أن للعددين: x وy لهما نفس الإشارة, لدينا:

$x^2-xy+y^2=(x^2+y^2-2xy)+xy=(x-y)^2+xy$ بما أن: $xy>0$ و $(x-y)^2\geq 0$ فإن: $x^2-xy+y^2>0$.

-2 نعتبر: $y=\sqrt{\pi}$ و $x=\frac{1}{\sqrt{2003}}$ لدينا حسب السؤال السابق: $x^2-xy+y^2>0$ أي:

$A=\frac{1}{2003}-\sqrt{\frac{\pi}{2003}}+\pi>0$

تمرين 43

1- نلاحظ أن:1- حل للمعادلة.

ليكن : x<-1 لدينا: $x^3<-1$ و $3x<-3$ أي:3x+3<0 ومنه: $x^3+3x+4<0$ إذن:x ليس حلا للمعادلة.

ليكن : x>-1 لدينا: $x^3>-1$ و $3x>-3$ أي:3x+3>0 ومنه: $x^3+3x+4>0$ إذن:x ليس حلا للمعادلة.

خلاصة: الحل الوحيد للمعادلة هو:1-.

3- لدينا: $a^3-\frac{1}{a^3}=(a-\frac{1}{a})(a^2+a\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2})=(a-\frac{1}{a})(a^2+1+\frac{1}{a^2})$ ومن جهة أخرى لدينا:

$(a-\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2$ أي: $(a-\frac{1}{a})^2+3=a^2+\frac{1}{a^2}+1$ ادن: $a^3-\frac{1}{a^3}=(a-\frac{1}{a})((a-\frac{1}{a})^2+3)$ أي:

$a^3-\frac{1}{a^3}=((a-\frac{1}{a})^3+3(a-\frac{1}{a}))$ وبما أن: $a^3-\frac{1}{a^3}=-4$ فإن: $((a-\frac{1}{a})^3+3(a-\frac{1}{a}))=-4$ أي:

$((a-\frac{1}{a})^3+3(a-\frac{1}{a}))+4=0$ إذن بوضع: $x=(a-\frac{1}{a})$ نحصل على المعادلة: $x^3+3x+4=0$ التي تقبل حلا

وحيدا في المجموعة: IR هو1- إذن: $(a-\frac{1}{a})=-1$. لدينا: $(a-\frac{1}{a})^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2$ أي:

$a^2+\frac{1}{a^2}=(a-\frac{1}{a})^2+2$ إذن: $a^2+\frac{1}{a^2}=(-1)^2+2=3$ من جهة أخرى لدينا:

$(a^2-\frac{1}{a^2})^2=a^4+\frac{1}{a^4}-2$ أي: $a^4+\frac{1}{a^4}=(a^2-\frac{1}{a^2})^2+2$ إذن: $a^4+\frac{1}{a^4}=(3)^2+2=11$.