تصحيح الفرض المحروس رقم A3

تمرين1: 6pts (2ن+ 2ن+ 2ن)

لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$x^2+y^2-2x+2y+\frac{3}{2}=0$$

و المستقيم (D) الذي معادلته : $x+y-1=0$

1. حدد مركز وشعاع الدائرة (C)
2. بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)
3. حدد إحداثيتي نقطه تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب: 1)نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)

$$a=-2;b=2;c=\frac{3}{2}$$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-2)^2+(2)^2-4\times\frac{3}{2}=4+4-6=2>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(1;-1)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2)نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3)نحدد احداثيات نقطة التماس T

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases}(1)\,x^2+y^2-2x+2y+\frac{3}{2}=0\\(2)\,x+y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)\,x^2+y^2-2x+2y+\frac{3}{2}=0\\(2)\,y=-x+1\end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $y=-x+1$ فنجد : $x^2-3x+\frac{9}{4}=0$

يعني : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$ يعني : $x=\frac{3}{2}$ ومنه : $y=-\frac{1}{2}$

ومنه نقطة التماس هي : $T\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

تمرين2: 4 pts (1ن+1.5ن+1.5ن)

علما أن : $\sin x=\frac{1}{2}$ و $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

أحسب $\cos x$ و $\cos(2x)$ و $\sin(2x)$

الجواب: 1)لدينا : $\cos^2x+\sin^2x=1$ يعني $\cos^2x=1-\sin^2x$

يعني $\cos^2x=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$ يعني $\cos^2x=\frac{3}{4}$ يعني $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ونعلم أن : $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ اذن : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)نعلم أن: $\cos(2x)=1-2\sin^2x$

اذن : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3) نعلم أن : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ ومنه :

$$\sin(2x)=2\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين3: 10 pts (2ن+2ن+2ن+ 2ن+ 2ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n-4}{u_n+1}\\u_0=3\end{cases}\quad\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n-2}\quad\forall n\in\mathbb{N}$

1)أحسب u_1 و v_0 2)بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq2$

3)أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)

4)أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

5)أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الجواب: 1) $u_1=\frac{5u_0-4}{u_0+1}=\frac{15-4}{3+1}=\frac{11}{4}$ و $v_0=\frac{1}{u_0-2}=\frac{1}{3-2}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\geq2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\geq2$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\geq2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-2=\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2=\frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1}=\frac{3u_n-6}{u_n+1}$

$u_{n+1}-2=\frac{3(u_n-2)}{u_n+1}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\geq2$

اذن : $u_n-2\geq0$ و $u_n+1>0$ و منه $u_{n+1}-2\geq0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\geq2$

3) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{5u_n-4}{u_n+1}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-4}{u_n+1}-2}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{1}{\frac{5u_n-4-2(u_n+1)}{u_n+1}}-\frac{1}{u_n-2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1}{3u_n-6}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{1}{u_n-2}=\frac{u_n+1}{3(u_n-2)}-\frac{3}{3(u_n-2)}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+1-3}{3(u_n-2)}=\frac{u_n-2}{3(u_n-2)}=\frac{1}{3}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول : $v_0=1$

4) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{3}$

وحدها الأول : $v_0=1$

فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{3}$

نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-2}$ يعني $u_n-2=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+2$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{3}$ اذن :

$$u_n = \frac{1}{1+\frac{n}{3}}+2 = \frac{1}{\frac{n+3}{3}}+2 = \frac{3}{n+3}+2 = \frac{3+2n+6}{n+3} = \frac{9+2n}{n+3}$$

5)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1}-u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{5u_n-4}{u_n+1}-u_n = \frac{5u_n-4-u_n(u_n+1)}{u_n+1} = \frac{-u_n^2+4u_n-4}{u_n+1}$$

$u_{n+1}-u_n = -\frac{u_n^2-4u_n+4}{u_n+1} = -\frac{(u_n-2)^2}{u_n+1} \le 0$ لأن : $-(u_n-2)^2 \le 0$ و

$u_n+1>0$ حسب السؤال 2) ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien