تمرين1: 6pts (2ن+ 2ن+ 2ن)

لتكن (C) الدائرة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$x^2+y^2-2x+4y+\frac{9}{2}=0$$

و المستقيم (D) الذي معادلته : $x-y-2=0$

1. حدد مركز وشعاع الدائرة (C)
2. بين أن المستقيم (D) مماس للدائرة (C)
3. حدد إحداثيتي نقطه تماس الدائرة (C) و المستقيم (D)

الجواب:

1)نحدد مركز وشعاع الدائرة (C)

$$a=-2;b=4;c=\frac{9}{2}$$

نحسب : $a^2+b^2-4c=(-2)^2+(4)^2-4\times\frac{9}{2}=4+16-18=2>0$

ومنه : (E) دائرة مركزها $\Omega(\frac{-a}{2};\frac{-b}{2})$ أي : $\Omega(1;-2)$

وشعاعها : $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2)نحسب $d(\Omega,(P))$ ونقارنها مع شعاع الدائرة

$$d(\Omega,(P))=\frac{|1+2-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=R$$

ومنه : المستقيم (D) مماس للدائرة (C)

3)نحدد احداثيات نقطة التماس T

نحل اذن النظمة التالية :

$$\begin{cases}(1)x^2+y^2-2x+4y+\frac{9}{2}=0\\(2)x-y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1)x^2+y^2-2x+4y+\frac{9}{2}=0\\(2)y=x-2\end{cases}$$

نعوض في المعادلة (1) $y=x-2$ فنجد :

$2x^2-2x+\frac{1}{2}=0$ يعني $x^2-x+\frac{1}{4}=0$

يعني : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$ يعني : $x=\frac{1}{2}$ ومنه : $y=-\frac{3}{2}$

ومنه نقطة التماس هي : $T\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

تمرين2: 4 pts (1ن+1.5ن+1.5ن)

علما أن : $\sin x=\frac{1}{3}$ و $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

أحسب $\cos x$ و $\cos(2x)$ و $\sin(2x)$

الجواب: 1)لدينا : $\cos^2x+\sin^2x=1$ يعني $\cos^2x=1-\sin^2x$

يعني $\cos^2x=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2$ يعني $\cos^2x=\frac{8}{9}$ يعني $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$ أو $\cos x=-\frac{\sqrt{8}}{3}$

ونعلم أن : $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ اذن : $\cos x=\frac{\sqrt{8}}{3}$

2)نعلم أن : $\cos(2x)=1-2\sin^2x$

اذن : $\cos(2x)=1-2\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

3) نعلم أن : $\sin(2x)=2\sin x\times\cos x$ ومنه :

$$\sin(2x)=2\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{8}}{9}$$

تمرين3: 10 pts (2ن+ 2ن+ 2ن+2ن+2ن)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$\begin{cases}u_{n+1}=\frac{5u_n-1}{u_n+3}\\u_0=2\end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة

كالتالي : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1. أحسب u_1 و v_0
2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge1$
3. أحسب $v_{n+1}-v_n$ و استنتج طبيعة المتتالية (v_n)
4. أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n
5. أدرس رتابة المتتالية (u_n)

الجواب

1) $u_1=\frac{5u_0-1}{u_0+3}=\frac{10-1}{2+3}=\frac{9}{5}$ و $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

2)نستعمل برهانا بالترجع

أ)نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=2\ge1$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

ب)نفترض أن: $u_n\ge1$

ج)نبين أن: $u_{n+1}\ge1$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-1=\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1=\frac{5u_n-1-(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{4u_n-4}{u_n+3}=\frac{4(u_n-1)}{u_n+3}$

و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\ge1$

اذن : $u_n-1\ge0$ و $u_n+3>0$ و منه $u_{n+1}-1\ge0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N}\ u_n\ge1$

3) $v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}$ نعوض u_{n+1} ب $\frac{u_n-1}{3+u_n}$

فنجد:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n}{3+u_n}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3-4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}=r$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول : $v_0=1$

2) بما أن : (v_n) متتالية حسابية أساسها : $r=\frac{1}{4}$ وحدها الأول :

$v_0=1$ فان : $v_n=v_0+nr$ أي : $v_n=1+\frac{n}{4}$

5)نعلم أن : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ يعني $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ يعني $u_n=\frac{1}{v_n}+1$

ونعلم أن : $v_n=1+\frac{n}{4}$ اذن :

$$u_n = \frac{1}{1+\frac{n}{4}} + 1 = \frac{1}{\frac{n+4}{4}} + 1 = \frac{4}{n+4} + 1 = \frac{4+n+4}{n+4} = \frac{n+8}{n+4}$$

5)دراسة رتابة المتتالية (u_n)

نحسب : $u_{n+1} - u_n$ وندرس الإشارة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} - u_n = \frac{5u_n - 1 - u_n(u_n + 3)}{u_n + 3} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 3}$$

$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 3} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 3} \le 0$ لأن : $-(u_n - 1)^2 \le 0$ و

$u_n + 3 > 0$ حسب السؤال 2) ومنه المتتالية (u_n) تناقصية

« c’est en forgeant que l’on devient forgeron » dit un proverbe.
c’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l’on devient un mathématicien