تصحيح الفرض الأول

أولمبياد الرياضيات

المستوى : الجذع المشترك العلمي

التمرين الأول

لدينا x عدد حقيقي :

1- لدينا : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2+2.x.\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=x^2+x+1$

إذن : لكل $x\in IR$ $\boxed{x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

2- لدينا :

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}-1=\frac{x^2+x-1-x^2-x-1}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{x}-1-\cancel{x^2}-\cancel{x}-1}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{-2}{x^2+x+1}<0$$

ومنه : (1) : $\boxed{\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}<1}$

لدينا :

$$\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\frac{5}{3}=\frac{3\left(x^2+x-1\right)+5\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{8x^2+8x+2}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2\left(2x+1\right)^2}{x^2+x+1}\geq 0$$

ومنه : (2) : $\boxed{-\frac{5}{3}\leq\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}}$

من (1) و (2) نستنتج أن لكل $x\in IR$: $\boxed{-\frac{5}{3}\leq\frac{x^2+x-1}{x^2+x+1}<1}$

التمرين الثاني

لدينا : $b^4+a^2c^2=c^4+a^2b^2$ يكافئ $b^4+a^2c^2-c^4-a^2b^2=0$

يكافئ $b^4-c^4+a^2c^2-a^2b^2=0$

يكافئ $\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2\right)-a^2\left(b^2-c^2\right)=0$

يكافئ $\left(b^2-c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)=0$

يكافئ $b^2+c^2-a^2=0$ أو $b^2-c^2=0$

يكافئ $a^2=b^2+c^2$ أو $b=c$ لأن: $b>0$ و $c>0$

وبما أن : $b\neq c$ فإن : $b^4+a^2c^2=c^4+a^2b^2$ يكافئ $a^2=b^2+c^2$

أي أن : $BC^2=AC^2+AB^2$

وحسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

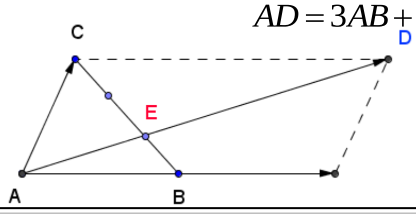
التمرين الثالث

لدينا : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

وحيث أن : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ أي : $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{BE}$ فإن : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BE}$

إذن : $\overrightarrow{AD} = 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) = 3\overrightarrow{AE}$

إذن : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$ وبالتالي: النقط D و E و A مستقيمية.



التمرين الرابع

1ـ لدينا لكل $n \in IN^*$: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$ إذن : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

2ـ لدينا لكل $n \in IN^*$:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2 &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2.\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 \\
&= 1 + 2.\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 - 2.\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 1 + 2.\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 2.\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - 2.\underbrace{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\right)}_{=0} = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

وبالتالي : $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}}$

3ـ لدينا : $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$ إذن : $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}$

إذن : $\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \left|1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right| = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ لأن : $1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1+\frac{1}{n(n+1)} > 0$

ومنه : $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2012^2}+\frac{1}{2013^2}}$

إذن : $= \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(1+\frac{1}{2012}-\frac{1}{2013}\right)$

يعني : $= \left(1+\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(1+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(1+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right) + \ldots + \left(1+\cancel{\frac{1}{2012}}-\frac{1}{2013}\right)$

إذن : $= \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{\text{2013 حد}} - \frac{1}{2013} = 2013 - \frac{1}{2013}$

وبالتالي : $\boxed{S = 2013 - \frac{1}{2013}}$