تمرين1: (8ن):

ليكن ABC مثلثا بحيث : BC= 3 و AC= 2 و AB = $\sqrt{7}$ و ليكن I منتصف القطعة $[BC]$ و J منتصف القطعة $[AC]$

1)أ)باستعمال مبرهنة الكاشي أحسب $\cos(\hat{A})$ و $\cos(\hat{B})$ ب)أثبت أن : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$ ج)أحسب AI و BJ

2)نعتبر النقطة M بحيث : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

أ) بين أن : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=1$ ب) بين أن : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ج) ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيمين (MB) و (AC)

الأجوبة : 1)أ)حسب مبرهنة الكاشي: في المثلث ABC

لدينا: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\hat{A}$

بالتعويض نجد: $9=4+7-4\sqrt{7}\cos\left(\hat{A}\right)$

يعني : $-2=-4\sqrt{7}\cos\left(\hat{A}\right)$ يعني $\cos\left(\hat{A}\right)=\frac{2}{4\sqrt{7}}=\frac{1}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{2\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{14}$

ولدينا: $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos\hat{B}$ بالتعويض نجد: $4=7+9-6\sqrt{7}\cos\left(\hat{B}\right)$

يعني : $-12=-6\sqrt{7}\cos\left(\hat{B}\right)$ يعني $\cos\left(\hat{B}\right)=\frac{-12}{-6\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

1)ب)لدينا: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$ يعني $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}=2\times\frac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{14}=\frac{14}{14}=1$

1)ج)حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$ يعني : $\sqrt{7}^2+2^2=2AI^2+\frac{1}{2}3^2$

يعني : $11=2AI^2+\frac{9}{2}$ يعني : $\frac{13}{2}=2AI^2$ يعني : $AI^2=\frac{13}{4}$ يعني : $AI=\sqrt{\frac{13}{4}}$

دائما حسب مبرهنة المتوسط: في المثلث ABC

$AB^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$ يعني : $\sqrt{7}^2+3^2=2BJ^2+\frac{1}{2}2^2$

يعني : $16=2BJ^2+\frac{4}{2}$ يعني : $14=2BJ^2$ يعني : $BJ^2=7$ يعني : $BJ=\sqrt{7}$

2)أ) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

2)ب)

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1=0$

ومنه : $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AC}$ وبالتالي : $(MB)\perp(AC)$

تمرين2: (8ن):

ليكن IAB مثلثا و C و D نقطتين بحيث $\overrightarrow{IC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ ونعتبر التحاكي h ذا المركز I ونسبته $k=\frac{3}{4}$

1)بين أن: $h(A)=C$ و أن : $h(B)=D$ 2)أنشئ شكلا تقريبيا.

3) بين أن: $AB=\frac{4}{3}CD$ 4) نعتبر المستقيم (Δ)المار من D والموازي للمستقيم (BC) ويقطع (IA) في النقطة F

حدد صورة المستقيم (BC) بالتحاكي h

5) بين أن : $\overrightarrow{IF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IC}$. واستنتج صورة النقطة C بالتحاكي h

الأجوبة :

1) :أ) بصفة عامة اذا كان :لدينا $h(O,k)$ $h(M)=N$ يعني $\overrightarrow{ON}=k\overrightarrow{OM}$

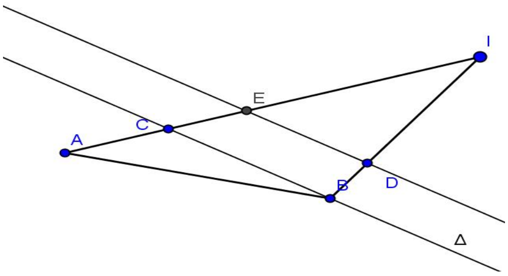
الكتابة $\overrightarrow{IC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IA}$ تعني أن : C هي صورة A بالتحاكي $h\left(I,\frac{3}{4}\right)$ ومنه $h(A)=C$

ب) $\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{BD}=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{IB}+4\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{ID}\right)=\vec{0}$ يعني $\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{BI}+4\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

يعني $\overrightarrow{IB}-4\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{ID}=\vec{0}$ يعني $-3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

يعني $4\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{IB}$ يعني $\overrightarrow{ID}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IB}$ ومنه $h(B)=D$

2)



3) أ) وجدنا اذن : $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ اذن : حسب الخاصية المميزة للتحاكي لدينا

$\overrightarrow{CD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ يعني

ومنه بالمرور الى المنظم نجد : $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left\|\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right\|$ اذن : $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|=\left|\frac{3}{4}\right|\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ اذن : $CD=\frac{3}{4}AB$ اذن : $AB=\frac{4}{3}CD$

4) نعتبر الاسقاط على المستقيم (AC) بتوازٍ مع المستقيم (Δ)

لدينا مسقط B هي C ومسقط D هي E ومسقط I هي I

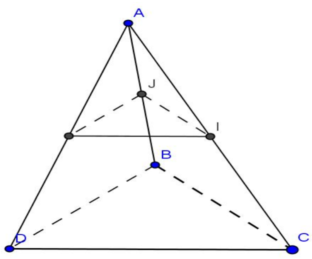
ونعلم أن : $\overrightarrow{ID}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IB}$ وأن الاسقاط يحافظ على معامل استقامية متجهتين اذن : $\overrightarrow{IE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{IC}$ ومنه : $h(C)=E$

تمرين3: (4ن):

ليكن $ABCD$ رباعي أوجه و لتكن I منتصف القطعة $[AC]$ و J منتصف القطعة $[AB]$ و K منتصف القطعة $[AD]$

1) أنشئ شكلا مناسبا. (0,5ن)   2) بين أن $(IJK)\parallel(BCD)$ (3,5ن)

الأجوبة : 1)



2) في المثلث ABC لدينا I منتصف $[AC]$ و J منتصف $[AB]$ اذن $(IJ)\parallel(BC)$

و لدينا في المثلث ABD : K منتصف $[AD]$ و J منتصف $[AB]$ اذن $(JK)\parallel(BD)$

و لدينا : $(IJ)\parallel(BC)$ و $(BC)\subset(BCD)$ إذن $(IJ)\parallel(BCD)$ (1)

و لدينا : $(JK)\parallel(BD)$ و $(BD)\subset(BCD)$ إذن $(JK)\parallel(BCD)$ (2)

و لدينا : $(IJ)\cap(JK)=\{J\}$ (3)

و لدينا : $(IJ)\subset(IJK)$ و $(JK)\subset(IJK)$ (4)

إذن(1) و(2) و(3) و(4) نستنتج أن: $(IJK)\parallel(BCD)$