

تمرين 1: (1ن+1ن+1ن+1ن+2ن)

أحسب وبسط : حيث x عدد حقيقي

$$D = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad C = \tan\left(\frac{37\pi}{4}\right) \quad \text{و} \quad B = \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) \quad \text{و} \quad A = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + 3\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5\pi - x\right)$$

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$F = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$A = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + 3\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5\pi - x\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\pi - \pi - x\right) \quad \text{الأجوبة:}$$

$$A = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \cos x - (-\sin x) = \cos x + \sin x$$

$$B = \cos\left(\frac{9\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{11\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{8\pi + \pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{12\pi - \pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{12\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x + \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = -\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x - \cos x$$

$$C = \tan\left(\frac{37\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{36\pi + \pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{36\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$D = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{5\pi}{6} \quad \text{حساب}$$

$$D = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{5\pi}{6} = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \left(-\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 \quad \text{ومنه} \quad \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{يعني} \quad \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$$

$$D = \cos^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$\frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7} \quad \text{يعني} \quad \frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi \quad \text{و أن} \quad \frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7} \quad \text{يعني} \quad \frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi \quad \text{و أن} \quad \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7} \quad \text{يعني} \quad \frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) \quad \text{ومنه}$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$F = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \quad \text{حساب}$$

$$\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8} \quad \text{يعني} \quad \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi \quad \text{و أن} \quad \frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8} \quad \text{يعني} \quad \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) \quad \text{ومنه}$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) \quad \text{يعني}$$

$$\frac{3\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8} \quad \text{يعني} \quad \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \pi \quad \text{و أن}$$

$$H = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{ومنه}$$

$$H = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2 \times 1 = 2 \quad \text{يعني}$$

تمرين 2: (1.5ن)

بين أن : حيث x عدد حقيقي $\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

الأجوبة :

$$\begin{aligned}\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x - \cos^2 x &= (\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2 + \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x) \times 1 - \cos^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x = 0\end{aligned}$$

تمرين 3: (1.5ن)

حل في المجال $[0, 2\pi[$: المعادلة $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \text{ يعني } \sin x = -\sin\frac{\pi}{4} \text{ يعني } \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

لأن: $\sin(-x) = -\sin x$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ أو } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ يعني } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

نقوم بالتأطير: (أ) $0 \leq -\frac{1}{4} + 2k < 2$ يعني $0 \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$

$$\text{يعني } \frac{1}{4} \leq 2k < 2 + \frac{1}{4} \text{ يعني } \frac{1}{8} \leq k < \frac{9}{8} \text{ إذن : } k = 1$$

ومنه: نعوض k ب 1 فنجد $x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 1 \times \pi$ أي $x_1 = \frac{7\pi}{4}$

(ب) نقوم بنفس عملية التأطير: $0 \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi < 2\pi$ يعني $0 \leq \frac{5}{4} + 2k < 2$ يعني $-\frac{5}{4} \leq k < \frac{3}{8}$ يعني $-\frac{5}{4} \leq 2k < 2 - \frac{5}{4}$

$$\text{وبالتالي : } S = \left\{ \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\} \text{ إذن : } k = 0 \text{ ومنه: نعوض } k \text{ ب } 0 \text{ فنجد } x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

تمرين 4: (2ن+2ن+2ن)

(1) حل في $[-\pi, 2\pi]$: المعادلة $\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

(2) حل في \mathbb{R} : المعادلة $(\sin x)^2 + \sin x - 2 = 0$

(3) حل في $[-\pi, \pi]$: المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(\pi - 3x)$ ومثل الحلول على الدائرة المثلثية

(الجواب: 1) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ أو $\cos x = 0$ يعني $\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

يعني $\cos x = 0$ أو $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ يعني $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{يعني } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ أو } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

نقوم بالتأطير: (أ) $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2\pi$ يعني $-1 \leq \frac{1}{2} + k \leq 2$ يعني

$$k = -1 \text{ أو } k = 1 \text{ أو } k = 0 \text{ إذن : } -\frac{3}{2} \leq k \leq \frac{3}{2} \text{ يعني } -1 - \frac{1}{2} \leq k \leq 2 - \frac{1}{2}$$

ومنه: نعوض k بهذه القيم فنجد: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 0 \times \pi$ أو $x_2 = \frac{\pi}{2} + 1 \times \pi$ أو $x_3 = \frac{\pi}{2} - 1 \times \pi$

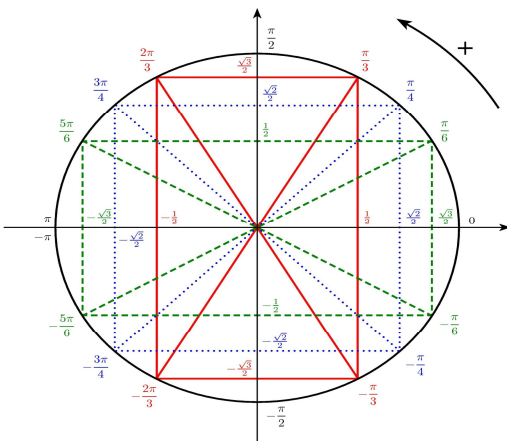
$$\text{أي : } x_1 = \frac{\pi}{2} \text{ أو } x_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ أو } x_3 = -\frac{\pi}{2}$$

(ب) التأطير: $-\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ يعني $-1 \leq \frac{1}{3} + 2k \leq 2$

$$\text{يعني } -1 - \frac{1}{3} \leq 2k \leq 2 - \frac{1}{3} \text{ يعني } -\frac{4}{3} \leq 2k \leq \frac{5}{3} \text{ يعني } -\frac{2}{3} \leq k < \frac{5}{6}$$

إذن : $k = 0$ ومنه: نعوض k ب 0 فنجد $x_4 = \frac{\pi}{3}$

(ج) نقوم بعملية التأطير: $-\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ يعني $-1 \leq \frac{2}{3} + 2k \leq 2$ يعني $-1 - \frac{2}{3} \leq 2k < 2 - \frac{2}{3}$ يعني $-\frac{5}{6} \leq k < \frac{2}{3}$



اذن : $k=0$ ومنه : نعوض k ب 0 فنجد : $x_5 = \frac{2\pi}{3}$ وبالتالي : $S = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$ أنظر الدائرة المثلثية:

(3) الجواب: نضع: $X = \sin x$ و $X^2 + X - 2 = 0$ والمعادلة تصبح :

نحسب المميز: $\Delta = 1$ و $a = 1$ و $b = 1$ و $c = -2$

$X_2 = \frac{1-3}{2 \times 1} = -2$ أو $X_1 = \frac{-1+3}{2 \times 1} = 1$ فان هذه المعادلة لها حلين هما: $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 = (3)^2 > 0$

ومنه بالرجوع للمتغير الأصلي نجد : $\sin x = 1$ أو $\sin x = -2$
نلاحظ أن المعادلة الثانية ليس لها حل في $]-\pi, \pi]$

اذن فقط نحل المعادلة: $\sin x = 1$ (معادلة خاصة) $\sin x = 1$ يعني : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه : $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

(3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin(\pi - 3x)$ يعني $\frac{\pi}{2} + x = \pi - 3x + 2k\pi$ أو $\frac{\pi}{2} + x = \pi - 3x + 2k\pi$

يعني $4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $-2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ يعني $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ أو $x = \frac{\pi}{4} - k\pi$

ومنه: نعوض k بالقيم الصحيحة النسبية ونبحث عن الحلول التي تنتمي للمجال: $]-\pi, \pi]$

ونجد فقط الحلول التالية: $x_1 = \frac{\pi}{8}$ أو $x_2 = \frac{5\pi}{8}$ بالنسبة ل $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

ونجد فقط الحلول التالية: $x_3 = \frac{\pi}{4}$ أو $x_4 = -\frac{3\pi}{4}$ بالنسبة ل $x = \frac{\pi}{4} - k\pi$

وبالتالي : $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}; \frac{\pi}{4} \right\}$

تمرين 5: (2ن+2ن)

(1) حل في $]-\pi; \pi]$ المتراجحة التالية $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

(2) $\cos x \leq \frac{1}{2}$ المتراجحة: $\left] -\frac{\pi}{2}, \pi \right]$

الأجوبة :

(1) $S = \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right]$

(2) $S = \left] -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$

