

الجدع مشترك علمي  
نماذج من أولمبياد الرياضيات

**تمرين 1:**  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان بحيث :  $x > 2$  و  $y > 2$

1. قارن : 8 و  $\frac{x^2}{x-2}$

2. استنتج أن :  $\frac{x^2}{x-2} + \frac{y^2}{y-2} \geq 16$

**تمرين 2:** أخذ محمد ثلاث أعداد و حسب المجموع ووجد 2607 ثم مسح عددين و قال لأخيه علي : ماهي قيمة العددين المسوحيين علما أن

أحدهم يزيد عن الآخر ب 15 ؟

ماهو جواب علي الصحيح ؟

$$2607 = \dots + \dots + 850$$

**تمرين 3:**  $n$  عدد صحيح طبيعي

بين أن  $(n^3 + 3n^2 + n)(n + 3n^2 + n + 2) + 1$  مربع كامل

**تمرين 4:**  $a$  و  $b$  أعداد حقيقية

بين أن  $(a^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 4ab$

**تمرين 5:**  $n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم

1. بين أن :  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$

2. نضع :  $A = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}}$

3. استنتج أن  $2(\sqrt{101} - 1) < A < 20$

**تمرين 6:**  $n$  عدد صحيح طبيعي غير منعدم

1. تحقق أن :  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2. أحسب وبسط :  $S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2013 \times 2014} + \frac{1}{2014 \times 2015}$

**تمرين 7:**  $a \in \mathbb{R}^+$  و  $b \in \mathbb{R}^+$  و  $c \in \mathbb{R}^+$

1. بين أن  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

2. استنتج أن  $(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$

**تمرين 8:**  $a$  و  $b$  أعداد حقيقية بحيث :  $a^2 + b^2 = 0$

1. بين أن  $a = 0$  و  $b = 0$

2. حل في  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  المعادلة :  $\sqrt{x} + \sqrt{y-2} = \frac{1}{2}(x+y)$

## الجدع مشترك علمي نماذج من أولمبياد الرياضيات

**تمرين 9:**  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية مختلفة مثلي مثلي

$$\text{أثبت أن } \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} = \frac{1}{(c-b)(a-c)}$$

**تمرين 10:** ليكن  $ABC$  مثلثا و نعتبر النقطتان  $D$  و  $E$  بحيث:  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

1. أنشئ شكلا مناسباً

2. بين أن النقط:  $D$  و  $E$  و  $A$  مستقيمة

**تمرين 11:**  $x$  و  $y$  عدنان حقيقيان

1. بسط:  $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

2. بين أن:  $3^{36} - 2^{36}$  قابل للقسمة على 13

**تمرين 12:**  $x$  عدد حقيقي موجب قطعاً بحيث:  $x - \frac{1}{x} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{6}$

بين أن:  $x^2 + \frac{1}{x^2} + 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$  عدد صحيح طبيعي

**تمرين 13:**  $x$  عدد حقيقي عمل  $x^4 + 1$

**تمرين 14:** علماً أن  $(C)$  دائرة قطرها:  $AB = 8\text{cm}$  و النقطة  $M$  تنتمي الى الدائرة

بحيث:  $BM = 4\text{cm}$  (أنظر الشكل الجانبية)

أحسب مساحة المستطيل  $ABEF$

**تمرين 15:** أحسب وبسط:

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2013}+\sqrt{2014}} + \frac{1}{\sqrt{2014}+\sqrt{2015}}$$

**تمرين 16:**  $a > 0$  و  $b > 0$  و  $c > 0$  نضع:  $B = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 9$

1. بين أن  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$

2. استنتج أن  $B \geq 0$

**تمرين 17:** حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية  $a$  و  $b$  و  $c$  بحيث:  $2^a \times 3^b \times 7^c = 7056$  أو  $2^a \times 5^b \times 7^c = 700$

**تمرين 18:** بين أن:  $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{199} + \frac{1}{200} > \frac{1}{2}$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.