

الحساب المثلثي calculs trigonométriques

القدرات المنتظرة

التمكن من مختلف صيغ التحويل . التمكن من حل معادلات ومتراجحات مثلثية تؤول في حلها إلى معادلات أساسية . التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلتها او متراجحتها مثلثية على الدائرة المثلثية

1- ص ص ي ي ع مع

1- المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ولتكن $\zeta(O, r=1)$ الدائرة المثلثية

ولتكن $M(x)$ و $M'(y)$ نقطتين من ζ فان $\vec{OM}' = \cos(y)\vec{i} + \sin(y)\vec{j}$ و

$$\vec{OM} = \cos(x)\vec{i} + \sin(x)\vec{j}$$

$$\vec{OM} \cdot \vec{OM}' = \|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{OM}'\| \cos(\vec{OM}; \vec{OM}') \quad \text{و} \quad \vec{OM} \cdot \vec{OM}' = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \quad (1) \quad \text{ادن}$$
$$= 1 \times 1 \cdot \cos(y-x) \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن $\cos(y-x) = \cos(y)\cos(x) + \sin(y)\sin(x)$

$$\cos(y+x) = \cos(y-(-x))$$

$$= \cos(y)\cos(-x) + \sin(y)\sin(-x) \quad \text{ب- لدينا}$$

ونعلم أن \cos دالة زوجية و \sin دالة فردية ادن:

$$\cos(y+x) = \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)$$

تمرين 2: علما أن $tg(a) = \frac{-1}{2}$ فاحسب $tg(2a)$ و $cos(2a)$ ثم $sin(2a)$

تمرين 3: احسب $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

تمرين 4: بين انه لكل a من \mathbb{R} فان $sin(2a) = sin\left(\frac{\pi}{3} + 2a\right) - sin\left(\frac{\pi}{3} - 2a\right)$ و

$$cos(2a) = cos\left(\frac{\pi}{3} + 2a\right) + cos\left(\frac{\pi}{3} - 2a\right)$$

II - تحويل الجداء إلى جمع

لدينا $cos(y+x) = cos(y)cos(x) - sin(y)sin(x)$

و $cos(x-y) = cos(y)cos(x) + sin(y)sin(x)$

بجمع طرف بطرف نجد $cos(x)cos(y) = \frac{1}{2} [cos(x+y) + cos(x-y)]$

بطرح طرف بطرف نجد $sin(x)sin(y) = -\frac{1}{2} [cos(x+y) - cos(x-y)]$

$$sin(x)cos(y) = \frac{1}{2} [sin(x+y) + sin(x-y)]$$

$$cos(x)sin(y) = \frac{1}{2} [sin(x+y) - sin(x-y)]$$

تحويل الجداء مع إلى جداء

في العلاقات السابقة نضع
$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$$

[http:// xyzmath.e-monsite.com](http://xyzmath.e-monsite.com)

:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

III- **تجربة** **ويل** $\frac{a-b}{2}$ $\frac{a+b}{2}$

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ و $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ لكل k من \mathbb{Z}

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga}\operatorname{tgb}}$$

إذا كان $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ فان

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga}\operatorname{tgb}}$$

إذا كان $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ فان

IV- **تجربة** **ويل الصيغة** $a \cos x + b \sin x$

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

ولدينا $a^2 \leq a^2 + b^2$ وكذلك $b^2 \leq a^2 + b^2$ إذن $\left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$ و $\left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) = 1$$
 وبما ان

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{أي} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
 ونعلم ان

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{و} \quad \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$$

وبالتالي

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \sin \beta + \sin x \cos \beta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \beta) \text{ و}$$

تمرين 5 عبر بدالات $\cos x$ و $\sin x$ عما يلي

1. $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 2. $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$A = \cos(2x) + \cos(6x)$$

$$B = \cos(7x) - \cos(3x)$$

$$C = \sin(3x) + \sin(5x)$$

$$D = \sin(8x) - \sin(6x)$$

حول إلى جداء كل من التعابير التالية

تمرين 6

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ بين أن

تمرين 7

1. تحقق من أن $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

تمرين 8

2. ا- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) / \cos(3x) = \cos x (1 - 4 \sin^2 x)$

ب- استنتج قيمة كل من $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

3. بين أن $\sin\left(\frac{7\pi}{30}\right) = \frac{1}{8} (\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1)$ (لاحظ أن $\frac{7\pi}{30} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}$)

تمرين 9 حل في \mathbb{R} المعادلات التالية

1. $\sin 7x = 0$ 2. $\cos 3x = 0$ 3. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

3. $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 5. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

تمرين 10 1. حل في \mathbb{R} المعادلات التالية

2. . حل ، ف ، \mathbb{R} المعادلات التالية $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$